



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**

João Marcos de Jesus Oliveira

**Mecânica do Dano Concentrado Expandida para Meios
Bidimensionais: Elemento Finito para Problemas de Localização
de Deformações em Chapas**

São Cristóvão – SE
2020

João Marcos de Jesus Oliveira

**Mecânica do Dano Concentrado Expandida para Meios
Bidimensionais: Elemento Finito para Problemas de Localização de
Deformações em Chapas**

Dissertação de mestrado apresentada à Universidade Federal de Sergipe (UFS) como etapa final da Pós-Graduação em Engenharia Civil para obtenção do título de mestre.

Orientador: David Leonardo Nascimento de Figueiredo Amorim.

São Cristóvão – SE
2020

É concedida à Universidade Federal de Sergipe permissão para reproduzir cópias desta monografia e emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte deste trabalho acadêmico pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

João Marcos de Jesus Oliveira

OLIVEIRA, João Marcos de Jesus.

MECÂNICA DO DANO CONCENTRADO EXPANDIDA PARA MEIOS BIDIMENSIONAIS: ELEMENTO FINITO PARA PROBLEMAS DE LOCALIZAÇÃO DE DEFORMAÇÕES EM CHAPAS/ João Marcos de Jesus Oliveira.

São Cristóvão, 2020

111 p.: il.

Trabalho Acadêmico Orientado. Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão.

I. Universidade Federal de Sergipe

II. Mecânica do Dano Concentrado Expandida para Meios Bidimensionais: Elemento Finito para Problemas de Localização de Deformações em Chapas.



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Aos 30 (trinta) dias do mês de janeiro de 2020, às 09h00min (nove horas), reuniram-se, no Mini auditório do PROEC na cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos", os membros da Comissão Examinadora, formada pelos professores doutores DAVID LEONARDO NASCIMENTO DE FIGUEIREDO AMORIM (Orientador - PROEC/UFS), HIGOR SERGIO DANTAS DE ARGOLO (Examinador interno - PROEC/UFS), JULIO FLOREZ LOPEZ (Examinador externo à Instituição - UNILA) e SEVERINO PEREIRA CAVALCANTI MARQUES (Examinador Externo à Instituição - UFAL), para a realização da Defesa de Dissertação ao Mestrado do Trabalho intitulado "MECÂNICA DO DANO CONCENTRADO EXPANDIDA PARA MEIOS BIDIMENSIONAIS: ELEMENTO FINITO PARA PROBLEMAS DE LOCALIZAÇÃO DE DEFORMAÇÕES EM CHAPAS" do mestrando JOÃO MARCOS DE JESUS OLIVEIRA. Após a apresentação do candidato e a arguição dos membros da supracitada Comissão, o candidato foi considerado APROVADO. Não havendo nada mais a tratar, eu, DAVID LEONARDO NASCIMENTO DE FIGUEIREDO AMORIM, presidente da Comissão, lavrei a presente ata, que será assinada por mim, pelo candidato e pelos demais membros da Comissão Examinadora. São Cristóvão, Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos", 30 de janeiro de 2020.

Prof. Dr. DAVID LEONARDO NASCIMENTO DE FIGUEIREDO AMORIM
(Presidente - Orientador)

Prof. Dr. HIGOR SERGIO DANTAS DE ARGOLO
(Examinador - interno)

Prof. Dr. JULIO FLOREZ LOPEZ
(Examinador - externo à Instituição)

Prof. Dr. SEVERINO PEREIRA CAVALCANTI MARQUES
(Examinador - externo à Instituição)

Eng. JOÃO MARCOS DE JESUS OLIVEIRA
(Candidato)

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus por me proporcionar tantas experiências e me auxiliar espiritualmente nessa caminhada até aqui.

Aos meus pais, pelo apoio incondicional e por proporcionarem o ambiente necessário para que pudesse me dedicar a este trabalho.

Aos meu orientador, o professor David Amorim, pelos ensinamentos e verdadeira orientação dedicada no decorrer deste trabalho de dissertação de mestrado. Também não posso deixar de agradecê-lo pela oportunidade do breve, mas proveitoso período de intercâmbio na UNILA. Meu muito obrigado por tudo!

Ao meu coorientador durante este trabalho, o professor Julio Flórez-López, pelos ensinamentos e por todo o apoio e recepção durante a minha estada na UNILA. O senhor foi uma fonte de inspiração.

Ao professor Ricardo Picón, pela contribuição essencial neste trabalho e também por todo o tempo dedicado a transmitir um pouco da sua experiência e conhecimento. Este trabalho também é seu.

Ao grupo do LAMEC, por todo o apoio, em especial aos seus idealizadores, os professores Ludmilson e David, pela dedicação em incentivar e melhorar cada dia mais o ensino e a pesquisa na universidade. Não seria exagero falar que represento muitos com esse agradecimento.

Aos colegas do PROEC que estiveram mais próximos durante essa caminhada, Leonardo, Adyson e Maic, pelo companheirismo e auxílio sempre que necessário. Desejo sucesso a todos.

Aos amigos que pude encontrar em Foz do Iguaçu, Julio, Carlos, Wagner e Aline, pela amizade e pelos bons momentos.

Aos colegas do CEASB, em especial, Edivaldo e Luis, pelo espaço cedido durante meus estudos em Foz do Iguaçu e também pelas experiências compartilhadas.

E a todos que direta ou indiretamente cruzaram o meu caminho e também contribuíram e fizeram parte da minha caminhada até aqui.

Resumo

Dentro da engenharia, a representação das estruturas por meio de modelos matemáticos é de fundamental importância. Através deles, em conjunto com ferramentas computacionais, consegue-se simular o comportamento dos elementos estruturais, possibilitando diversas análises. Com isso, torna-se determinante a elaboração de modelos cada vez mais precisos e que englobem um maior número de fenômenos observados na realidade. Os principais modelos atuais são baseados na teoria da plasticidade, na mecânica do dano e na mecânica da fratura. Sabidamente, ao se atingir a zona de amolecimento, modelos de dano clássicos levam a dependência de malha em uma análise por elementos finitos sempre que uma solução localizada é escolhida. O chamado fenômeno da localização, nesses modelos, leva a uma infinidade de soluções possíveis e, obviamente, necessita de algum critério de regularização para que se obtenha a solução correta. Este trabalho apresenta uma nova formulação de elemento finito para a análise de problemas de localização de deformações em chapas, baseado principalmente no trabalho anterior de Amorim et al. (2018). O novo modelo não se baseia nas modernas abordagens da mecânica do dano que se utilizam de modelos não locais ou por gradiente para contornar o problema da localização. Trata-se de uma expansão da mecânica do dano concentrado, ou MDC, para meios bidimensionais. Essa formulação mais geral da teoria é aqui chamada de mecânica do dano concentrado expandida, ou MDCX. A MDC utiliza ideias chave da mecânica da fratura e da mecânica do dano em união com o conceito de rótulas plásticas. Até então, em termos de aplicabilidade concreta, os modelos da MDC estavam limitados a análise de pórticos e arcos, demonstrando resultados objetivos para esses casos. Para esses modelos, o elemento finito é dado pela combinação de um elemento de barra elástico com duas rótulas inelásticas nas extremidades. No caso de um meio bidimensional, como em elementos de chapa, as rótulas inelásticas se transformam em bandas de localização. O elemento finito proposto neste trabalho consiste na união de um elemento elástico de quatro nós com um conjunto de bandas de localização nos lados e também no interior do elemento. Leis de evolução de dano que descrevem o comportamento de cada banda de localização são introduzidas na formulação do modelo e o elemento proposto é então implementado em um programa de análise por elementos finitos. A convergência dos resultados numéricos para uma solução única, na medida em que se refina a malha, é demonstrada através de exemplos e problemas relacionados são discutidos. Os resultados são apresentados de maneira gráfica junto à configuração final da estrutura do problema, destacando a formação das bandas de localização.

Palavras chave: mecânica do dano concentrado, meios bidimensionais, localização de deformações, independência de malha, elementos finitos.

Abstract

In engineering, the representation of structures using mathematical models has a fundamental importance. Through them, together with computational tools, it is possible to simulate the behaviour of structural elements, allowing for various analyses. Thus, the development of increasingly precise models that includes a greater number of phenomena observed in reality becomes crucial. The main current models are based on plasticity theory, damage mechanics and fracture mechanics. As it is well known, upon reaching the softening zone, classic damage models lead to mesh dependency in a finite element analysis whenever a localized solution is chosen. The so-called phenomenon of localization in these models leads to infinite possible solutions and obviously needs some regularization criteria to obtain the correct solution. This paper presents a new finite element formulation for the analysis of a tensile plate regarding strain localization problems, based mainly on the previous work by Amorim et al. (2018). The new model is not based on modern approaches to damage mechanics that use nonlocal or gradient models to circumvent the localization problem. It is an expansion of Concentrated Damage Mechanics, or MDC, into two-dimensional continuum. This more general formulation of the theory is here referred to as Expanded Concentrated Damage Mechanics, or MDCX. MDC uses key ideas of fracture mechanics and damage mechanics in conjunction with the concept of plastic hinges. Until then, in terms of concrete applicability, the MDC models were limited to analysis of frames and arches, demonstrating objective results for these cases. For these models, the finite element is given by combining an elastic bar element with two inelastic hinges at the ends. In the case of a two-dimensional medium, such as plate elements, inelastic hinges become localization bands. The finite element proposed in this work consists of joining a four-node elastic element with a set of locating bands on the sides and also within the element. Damage evolution laws that describe the behaviour of each location band are introduced in the model formulation and the proposed element is then implemented in a finite element analysis program. The convergence of numerical results to a single solution as the mesh is refined is demonstrated through examples and related problems are discussed. The results are presented graphically along with the final configuration of the problem structure, highlighting the formation of the localization bands.

Keywords: lumped damage mechanics, two-dimensional continuum, strain localization, mesh independency, softening, finite elements.

Lista de Abreviaturas e Siglas

EDS	–	Elemento Diferencial de Sólido
EP	–	Energia Potencial
FCT	–	Fator de Concentração de Tensão
FIT	–	Fator de Intensidade de Tensão
MDC	–	Mecânica do Dano Concentrado
MDCX	–	Mecânica do Dano Concentrado Expandida
MEF	–	Método dos Elementos Finitos
ET	–	Energia Total
ES	–	Energia de Superfície
ZPF	–	Zona de Processo de Fratura
CCE	–	Condição de Contorno Essencial
CCN	–	Condição de Contorno Natural
EC	–	Equação Cinemática
LC	–	Lei Constitutiva
LE	–	Lei de Evolução
EQ	–	Equação de Equilíbrio
EF	–	Elemento Finito

Lista de Símbolos

x, y, z	– Coordenadas cartesianas
E	– Módulo de elasticidade ou de Young
t	– Tempo, instante, espessura, passo ou incremento
ε	– Deformação, deformação total
σ_{max}	– Tensão máxima local
σ_{med}	– Tensão média aplicada
a	– Diâmetro maior, comprimento de fissura
b	– Diâmetro menor
P	– Força, força axial
Δ	– Deslocamento, alongamento, deslocamento imposto
M	– Massa
g	– Aceleração da gravidade
W_{ext}	– Trabalho externo
S	– Rigidez
U	– Energia de deformação, deslocamentos nodais da estrutura
W	– Energia de deformação complementar
F	– Flexibilidade
Γ	– Energia de superfície
U_0	– Energia de deformação da chapa sem fissura
a_0	– Comprimento de fissura inicial
a_{cr}	– Comprimento de fissura crítico
G	– Taxa de liberação de energia ou força condutora da fissura
R	– Resistência a fissuração
K_I, K_{II} e K_{III}	– Fatores de concentração de tensão para modo I, II e III, respectivamente
A	– Área, área total, área da seção transversal
A_d	– Área de microdefeitos
σ	– Tensão normal média, tensão de Cauchy
$\bar{\sigma}$	– Tensão efetiva
\bar{A}	– Área de resistência efetiva
ω	– Dano contínuo

\bar{E}	– Módulo de elasticidade efetivo
ε^e	– Deformação elástica
ε^ω	– Deformação de dano
ε^p	– Deformação plástica
f	– Função de escoamento
σ_y	– Tensão de escoamento
ω_u	– Dano último
G^ω	– Taxa de liberação de energia do elemento danificado ou força condutora do dano
R^ω	– Função de resistência ao dano
ε^e	– Deformação última
L	– Comprimento da barra, comprimento total
ε_{cr}	– Deformação crítica
ε_u	– Deformação última
l_1, L_1	– Comprimento do elemento 1
l_2, L_2	– Comprimento do elemento 2
u	– Deslocamento imposto
σ_1	– Tensão no elemento 1
σ_2	– Tensão no elemento 2
n	– Força axial
ε_1	– Deformação no elemento 1
ε_2	– Deformação no elemento 2
$\{q\}$	– Vetor de deslocamentos nodais
u_i, u_j	– Deslocamento no nó i e j respectivamente
δ	– Alongamento, alongamento total do elemento
$\{Q\}$	– Forças nodais do elemento, forças nodais externas
δ^e	– Alongamento elástico
δ^d	– Alongamento de dano
δ_u	– Alongamento último
$\{\varepsilon\}$	– Deformações
$\{\sigma\}$	– Tensões
$[K]$	– Matriz de rigidez
$[B]$	– Matriz cinemática convencional
$[H]$	– Matriz de coeficientes elásticos

i	– Nó do elemento quadrilateral, controle ou passo de iteração
j, k, l	– Nós do elemento quadrilateral
u, v	– Graus de liberdade dos nós do elemento na direção x e y , respectivamente
u_i, v_i	– Deslocamentos na direção x e y respectivamente para o nó i
$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$	– Tensões de compressão na direção x, y e tensão de cisalhamento no plano xy
Fx_i	– Força nodal no nó i na direção x
$\{\delta\}$	– Deformações generalizadas ou alongamentos dos <i>numexes</i>
δ_{ij}	– Alongamento do <i>numex</i> entre os nós i e j
$[b]$	– Matriz de transformação cinemática
ξ, η	– Coordenadas do espaço de referência usual do elemento
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$	– Deformações na direção x, y e distorção no plano xy , respectivamente
a_1, a_3, b_1, b_3 e c	– Constantes independentes do campo de deformações
$[T]$	– Matriz de transformação dos <i>numexes</i>
$\{\delta^d\}$	– Alongamentos de dano
δ_{ij}^d	– Alongamento de dano do <i>numex</i> entre os nós i e j
$e_{i\eta}$	– Espessura da banda no nó i entre os nós i e j (direção η)
$\{\delta^e\}$	– Alongamentos elásticos
$\sigma_{i\xi}$	– Tensão normal ao nó i na direção do eixo ξ
σ_n	– Tensão normal
e	– Espessura da banda de localização, elemento finito
$e_{i,ij}$	– Espessura da banda ij no nó i
$\{FR\}$	– Vetor de forças residuais
U_i	– Deslocamento da estrutura na iteração i
t_f	– Incremento ou passo final
m	– Número total de elementos
$g_{i,ij}$	– Lei de evolução do nó i da banda ij
$\sigma_{n,i,ij}$	– Tensão normal no nó i da banda ij
$\sigma_{cr,i,ij}$	– Tensão crítica no nó i da banda ij
$\delta_{u,i,ij}$	– Alongamento ultimo do nó i da banda ij
ζ	– Controle de incrementação do passo i
$U_{e=1}^e$	– Operador de montagem da matriz global elemento a elemento

Lista de Figuras

Figura 1.1 - Elemento estrutural básico da teoria de sólidos: elemento diferencial de sólido	16
Figura 1.2 - Resumo esquemático das variáveis e equações para sólidos.....	17
Figura 1.3 - Rede atômica (a), discordâncias (b), deslizamento (c) e acúmulo de discordâncias (d) ...	23
Figura 1.4 - Resumo esquemático do processo de ruptura.....	24
Figura 2.1 - Chapa infinita com furo elíptico.....	27
Figura 2.2 - Energia de deformação em um sólido sujeito a uma força P.....	29
Figura 2.3 - Energia total em função do comprimento de fissura	30
Figura 2.4 - Estrutura sujeita a força imposta (a) e a deslocamento imposto (b)	32
Figura 2.5 - Modos de fratura.....	34
Figura 2.6 - Elemento danificado.....	36
Figura 2.7 - Campo de tensões em uma chapa fissurada.....	40
Figura 2.8 - Tensão em função da deformação relacionada ao dano	41
Figura 2.9 - Barra uniaxial (a) e tensão em função da deformação no modelo de dano (b).....	42
Figura 2.10 - Força em função do deslocamento para malhas com um, dois e sete elementos	43
Figura 2.11 - Malha de elemento finito (a) e força em função do deslocamento para malha com dois elementos com diferentes comprimentos (b).....	43
Figura 2.12 - Barra dividida em dois elementos sujeitos a um deslocamento imposto (a) e história de deslocamento (b)	45
Figura 2.13 - Equação constitutiva e de equilíbrio.....	46
Figura 2.14 - Solução única antes do pico (a), solução homogênea pós-pico (b) e solução localizada pós-pico (c).....	47
Figura 2.15 - Curvas de força vs. deslocamento	48
Figura 2.16 - Representação esquemática de um teste triaxial: antes da localização (A) e depois da localização (B).....	48
Figura 2.17 – Elemento finito do dano concentrado para uma barra uniaxial	51
Figura 2.18 - Resposta inelástica do material (a) e solução numérica para uma barra simples sob tração (b)	53
Figura 2.19 - Elemento clássico de quatro nós (a), extensômetros numéricos ou <i>numexes</i> (b) e espaço de referência (c).....	55
Figura 2.20 - Graus de liberdade do elemento	56
Figura 2.21 - Bandas de localização em um elemento de quatro nós (a) e espessuras das bandas (b)..	58
Figura 2.22 - Chapa sólida em formato de "L", geometria, propriedades do material e condições de contorno.....	60
Figura 2.23 - Força vs. deslocamento para diversas malhas	61

Figura 2.24 - Configuração deformada e bandas de localização para a malha L/12.....	61
Figura 2.25 - Configuração deformada e bandas de localização para a malha L/24.....	62
Figura 3.1 - Novo elemento proposto.....	64
Figura 3.2 - Elemento atual (a) e elemento padrão (b).....	65
Figura 3.3 - Esquema geral do modelo MDCX.....	66
Figura 3.4 - Ilustração do funcionamento do método de Newton-Raphson.....	68
Figura 3.5 - Algoritmo de funcionamento do programa de análise.....	70
Figura 3.6 - Algoritmo de processos do elemento finito.....	74
Figura 4.1 - Chapa em L (Rodrigues): geometria, propriedades e condições de contorno	75
Figura 4.2 – Deformada da Chapa L (Rodrigues) – altura vs. comprimento	76
Figura 4.3 – Estudo de convergência da Chapa L Rodrigues	78
Figura 4.4 - Chapa em L (Amorim): geometria, propriedades e condições de contorno	79
Figura 4.5 - Estudo de convergência da chapa “L” (todas as malhas)	80
Figura 4.6 - Estudo de convergência da chapa “L” (malhas refinadas)	80
Figura 4.7 – Análise comparativa da malha L432.....	81
Figura 4.8 – Configuração deformada: L432N (esquerda) e L432A (direita).....	82
Figura 4.9 – Configuração da chapa em “L” invertida.....	83
Figura 4.10 - Estudo de convergência da chapa “L” invertida.....	84
Figura 4.11 - Análise comparativa “L” invertido (malha L432).....	84
Figura 4.12 – Configuração deformada “L” invertido malha L432I (altura x comprimento).....	85
Figura 4.13 – Chapa tracionada: configuração.....	85
Figura 4.14 – Chapa tracionada: convergência dos resultados (todas as malhas).....	86
Figura 4.15 – Chapa tracionada: convergência dos resultados (malhas refinadas).....	87
Figura 4.16 – Chapa tracionada: configuração deformada CHA900	87
Figura 4.17 –Chapa tracionada: configurações deformadas (altura x comprimento).....	88

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	13
1.1. CONSIDERAÇÕES INICIAIS	13
1.1.1. Modelos Estruturais e Elementos Finitos	13
1.1.2. Evolução dos Modelos Estruturais	17
1.1.3. O Processo de Ruptura nos Materiais.....	21
1.2. OBJETIVOS	24
1.2.1. Objetivo Geral	24
1.2.2. Objetivos Específicos	24
1.3. ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO.....	25
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	26
2.1. FUNDAMENTOS DA MECÂNICA DA FRATURA.....	26
2.2. FUNDAMENTOS DA MECÂNICA DO DANO.....	35
2.2.1. O Problema da Unicidade de Solução	41
2.3. FUNDAMENTOS DA TEORIA DA LOCALIZAÇÃO.....	44
2.4. MECÂNICA DO DANO MODERNA.....	49
2.5. MECÂNICA DO DANO CONCENTRADO (MDC).....	50
2.6. MECÂNICA DO DANO CONCENTRADO EXPANDIDA (MDCX).....	53
2.6.1. O Elemento Quadrilateral Elástico de Quatro Nós.....	54
2.6.2. O Elemento Quadrilateral de Quatro Nós da MDC.....	57
3. METODOLOGIA	63
3.1. ELEMENTO FINITO PROPOSTO: MODO I.....	63
3.2. IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL	66
4. SIMULAÇÕES NUMÉRICAS E RESULTADOS	75
5. CONCLUSÕES.....	89
REFERÊNCIAS	90
APÊNDICE A – Matrizes do elemento de quatro nós da MDCX proposto por Amorim et al. (2018)	94
APÊNDICE b – Matrizes do elemento de quatro nós da MDCX proposto neste trabalho	99
APÊNDICE C – Modelo para estruturas em concreto reforçado com fibras de aço pela MDC.....	101

1. INTRODUÇÃO

1.1. CONSIDERAÇÕES INICIAIS

1.1.1. Modelos Estruturais e Elementos Finitos

A engenharia estrutural é o ramo da engenharia responsável por garantir a integridade de sistemas estruturais como máquinas, construções ou qualquer tipo de sólido. Como apontam Flórez-López, Marante e Picón (2015), pode-se dividir a engenharia estrutural em duas vertentes que apesar de diferentes, se complementam: mecânica estrutural e projeto estrutural. A primeira tem por objetivo a determinação de como as ações externas se distribuem ao longo dos elementos estruturais e como os esforços internos são gerados. Já a segunda lida com o desenvolvimento e aplicação de diretrizes que possibilitam o dimensionamento seguro e econômico de estruturas para usos específicos. No projeto estrutural, os esforços atuantes nos elementos ditam como devem ser dimensionadas as estruturas. No entanto, já que é necessário conhecer previamente as dimensões dos elementos (pré-dimensionamento) para se encontrar os esforços atuantes nos mesmos, o processo se torna iterativo por meio da aplicação sucessiva e complementar de técnicas da mecânica estrutural e do projeto estrutural. Além disso, a mecânica estrutural também pode ser usada no diagnóstico de estruturas existentes.

Ainda conforme Flórez-López, Marante e Picón (2015), a mecânica estrutural é geralmente aplicada através de programas de análise estrutural. Tais programas são essencialmente formados por modelos matemáticos compostos por equações usadas para descrever o comportamento de uma estrutural sujeita a determinada solicitação e por procedimentos numéricos usados para solucionar essas equações e, portanto, o problema estrutural. Sendo assim, atrelado a um modelo que descreva fenômenos físicos com precisão, é igualmente importante o desenvolvimento de procedimentos numéricos e ferramentas computacionais que possibilitem a aplicação desses modelos em casos práticos de engenharia.

Dentre os diversos procedimentos numéricos, atualmente o mais utilizado e alvo de diversos desenvolvimentos é o Método dos Elementos Finitos (MEF). Como explicam Zienkiewicz e Taylor (2005), o MEF funciona a partir de uma subdivisão do domínio do elemento ou estrutura sob análise, ou seja, é feita uma discretização geométrica do problema que é dividido em partes menores chamadas de elementos finitos. Dentro da análise, o elemento finito é essencialmente responsável pela descrição do comportamento estrutural. Logo, cada modelo matemático, a depender do fenômeno e estrutura a ser representada, apresenta uma formulação de elemento finito particular.

Conforme Liu e Quek (2003), a subdivisão da estrutura em elementos menores tem por objetivos a representação simples de geometrias complexas, a possibilidade de inclusão de propriedades distintas de modo simples em diferentes partes da estrutura e principalmente a simplificação do cálculo matemático envolvido. Ao invés de resolver uma complexa geometria, no processo do MEF, cada subdivisão ou elemento possui um conjunto de equações mais simples que aproximam localmente as complexas equações do problema original (de forma geral, equações diferenciais parciais) e que podem ser recombinadas em forma de um sistema global para o cálculo final da estrutura. Para solução do sistema de equações resultante, segundo Zienkiewicz e Taylor (2005), existem várias técnicas conhecidas, como por exemplo o método de eliminação de Gauss.

O MEF é geralmente aplicado dentro de programas de análise estrutural, responsáveis pelas discretização do domínio (geração da malha), aplicação do elemento finito específico para o problema e solução do sistema de equações, além de diversos outros procedimentos, como a apresentação dos resultados. Uma descrição básica do funcionamento de um programa de elementos finitos, usado para as simulações numéricas deste trabalho, está apresentada na seção 3.2.

A subdivisão do domínio ou geração da malha é uma importante etapa dentro do processo de cálculo. Como cada elemento aproxima localmente o problema original, quanto maior o número de elementos, maior a precisão do resultado. Este entendimento é análogo ao processo de aproximar uma curva por retas, quanto maior for o número de pequenas retas usadas, maior será a aproximação da curva real. Desse modo, em regiões onde se espera uma maior concentração dos esforços ou em regiões com maior complexidade geométrica (ex.: locais de mudanças bruscas na geometria), é indicado o uso de uma malha mais fina, ou seja, com mais elementos. De modo geral, quanto mais refinada for a malha, melhor a solução do problema. Com isso, ao se fazer uma análise pelo MEF, é importante um estudo de convergência com malhas cada vez mais finas, sendo que o resultado deve convergir para uma solução única.

Os primeiros modelos estruturais representavam apenas o comportamento elástico linear dos materiais baseado na teoria da elasticidade. Com o decorrer de novos trabalhos e pesquisas na área, os modelos foram se tornando cada vez mais complexos e próximos da realidade, incluindo a representação de diversos fenômenos não lineares como por exemplo, a plasticidade e o dano.

Tabela 1.1 apresenta um resumo dos principais modelos estruturais, de forma que um modelo, para uma análise estrutural completa, é formado basicamente pela escolha de um item de cada coluna de acordo com necessidade do caso em estudo.

Tabela 1.1 - Resumo dos principais modelos da mecânica estrutural

Representação da geometria	Representação do material	Representação das deformações	Representação das solicitações
Sólidos	Teoria da Elasticidade	Pequenas deformações	Estáticas ou quase estáticas
Placas, chapas e cascas	Teoria da Plasticidade	Grandes deformações	Dinâmicas
Vigas e arcos	Viscoplasticidade		
Pórticos	Mecânica da Fratura		
	Mecânica do Dano		

Fonte: o autor

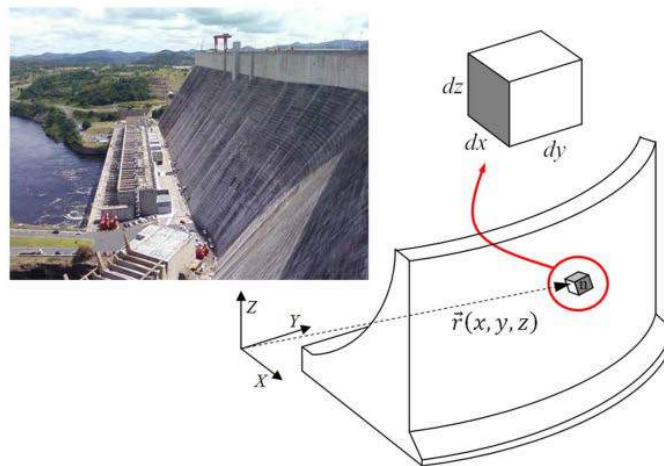
A elaboração de modelos que descrevam e representem com maior proximidade o comportamento real de estruturas é importante para projetos práticos de engenharia. Como exemplificam Flórez-López, Marante e Picón (2015), em zonas sujeitas a terremotos, no caso de tremores classificados como severos, é permitido o dimensionamento que preveja a ocorrência de dano na estrutura desde que, obviamente, não se atinja o colapso total. Para que seja possível tal dimensionamento com segurança, é essencial o desenvolvimento de modelos que levem em conta o dano e representem os fenômenos que ocorrem próximo ao colapso. As teorias da elasticidade e plasticidade apresentam grandes limitações para esse fim. As mecânicas da fratura e do dano são as principais opções para o caso, porém, também apresentam algumas desvantagens e limitações que serão discutidas no decorrer deste trabalho.

Para representação da estrutura nos modelos, sempre se assume que a mesma é composta pela união de um conjunto de unidades básicas estruturais. O tipo de unidade básica estrutural diferencia os itens da primeira coluna da Tabela 1.1. Na teoria dos sólidos, alvo deste trabalho, a unidade básica estrutural é o elemento diferencial de sólido (EDS) (Figura 1.1). Cada EDS é identificado usando coordenadas x , y e z em sua configuração inicial. Na formulação do modelo são introduzidas algumas variáveis para cada elemento que podem ser variáveis cinemáticas ou variáveis dinâmicas. As cinemáticas definem o movimento do elemento (vetor

de deslocamento) e suas deformações (tensor de deformação). As dinâmicas são usadas para caracterizar forças externas (vetor de forças de volume, de superfície ou concentradas) e tensões que cada EDS suporta (tensor de tensão). Todas essas variáveis dependem das três coordenadas espaciais que identificam cada elemento e, a depender da análise, também do tempo. A análise de um sólido é formulada pela introdução de três conjuntos de equações: equações cinemáticas que relacionam o campo de deformação com os deslocamentos, equação de equilíbrio entre forças externas e o campo de tensões e equação constitutiva que relaciona tensões com deformações. Além disso, são introduzidas as condições de contorno do problema (FLÓREZ-LÓPEZ; MARANTE; PICÓN, 2015).

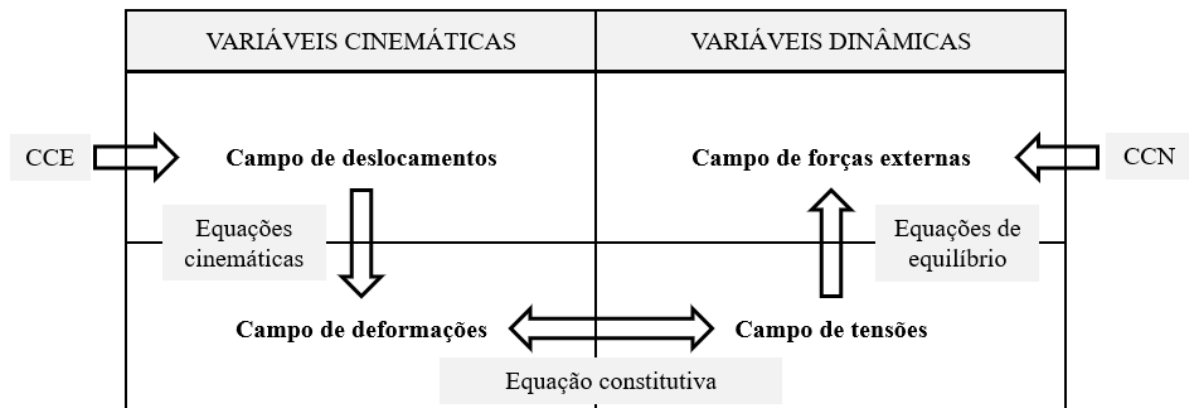
A Figura 1.2 representa o arranjo da formulação para um caso geral elástico. Ao se tratar de casos inelásticos, precisa-se conhecer a história de ocorrência de cada variável, ou seja, o seu comportamento em cada instante t . Além disso, é necessário a introdução de novas variáveis internas (variáveis de estado) em conjunto com suas leis de evolução dentro da equação constitutiva, para com isso levar em conta os fenômenos inelásticos que ocorrem nas estruturas sob determinada solicitação, a exemplo da plastificação e do dano.

Figura 1.1 - Elemento estrutural básico da teoria de sólidos: elemento diferencial de sólido



Fonte: Flórez-López, Marante, Picón (2015)

Figura 1.2 - Resumo esquemático das variáveis e equações para sólidos



Fonte: o autor

Conforme Bathe (2014), é importante destacar que ao se aplicar os diferentes modelos em uma análise por elementos finitos, a formulação do elemento usado deve corresponder a teoria que representa o material. Por exemplo, no caso de um meio sólido, são necessários elementos bidimensionais ou até mesmo tridimensionais para subdivisão do domínio nos quais estão inerentes todas as variáveis e equações necessárias para descrição do comportamento do material. Neste trabalho, cujo alvo é o estudo de chapas, é necessário o uso de elementos bidimensionais.

1.1.2. Evolução dos Modelos Estruturais

A representação matemática do comportamento não linear das estruturas é um campo de estudos importante na engenharia. Com esse objetivo, modelos matemáticos, baseados nas principais teorias não lineares (teoria da plasticidade, mecânica da fratura e mecânica do dano), são atualmente aplicados em programas de análise estrutural por elementos finitos. No entanto, mesmo os principais modelos apresentam suas desvantagens e limitações (AMORIM, 2016).

A teoria da plasticidade, provavelmente a mais conhecida, trabalha com deformações plásticas locais que são responsáveis por representar o processo de deterioração. Dentre os principais fenômenos que podem ser modelados com base na plasticidade, estão a presença de deformações plásticas (deformações que não desaparecem após o descarregamento), zona de encruamento ou endurecimento plástico (crescimento do limite elástico) e existência de tensão última ou máxima. Apesar de conseguir descrever uma parte dos fenômenos comprovados experimentalmente que ocorrem nas estruturas, a teoria falha ao tentar reproduzir comportamentos não lineares nas proximidades do colapso, a exemplo da fase de

amolecimento, onde ocorre degradação da resistência (decréscimo do limite elástico) e degradação da rigidez (decréscimo do módulo de elasticidade). Além disso, modelos de plasticidade não preveem a existência de deformação máxima ou de falha. Todos esses efeitos só viriam a ser bem representados com o surgimento da mecânica do dano (FLÓREZ-LÓPEZ; MARANTE; PICÓN, 2015)

A mecânica da fratura, como explica Broek (1984), representa a deterioração dos materiais por meio da modificação da geometria dos sólidos, determinando quando e como essa modificação pode ocorrer. A abordagem dominante é a introdução de fissuras equivalentes maiores do que as reais de modo que os fenômenos inelásticos que antecedem a propagação da fissura são considerados ocorrendo em zonas de volume zero chamadas de extensão artificial da fissura. Na abordagem da zona de processo de fratura, uma nova lei de evolução da fratura é introduzida, adotando o conceito de deslocamento de abertura da fissura como variável cinemática. Na mecânica da fratura linear elástica, é proposta uma descrição do processo em dois estágios: nada ocorre ou a fissura propaga. No entanto, essa abordagem não é suficiente para descrever o fenômeno por completo, já que entender e modelar os processos inelásticos que antecedem a propagação da fissura é tão importante quanto modelar o crescimento da própria fissura.

Conforme é discutido por Amorim (2016), a mecânica da fratura modela o processo de deterioração estrutural em meios contínuos por meio da propagação de fissuras discretas e sendo assim apresenta boa precisão para estruturas com geometrias simples, poucas fissuras e materiais homogêneos. Isso faz com que, se tratando de problemas de engenharia, a teoria não seja adequada para aplicações práticas, visto que usualmente as estruturas reais são complexas. Além disso, os modelos clássicos de fratura demandam a consideração de uma fissura inicial para iniciar a análise, o que também nem sempre se encaixa com problemas cotidianos da engenharia.

A mecânica do dano clássica, mais recente que as anteriores, tem sido exitosa na descrição de diversos mecanismos de deterioração e falha estrutural em meios contínuos que precedem a propagação da fissura. A ideia fundamental, segundo Lemaitre (1992), é a introdução de uma variável interna que caracteriza a deterioração do material. Essa variável, chamada de dano, geralmente varia de zero a um. O dano é introduzido nas leis de comportamento usando o conceito de tensão efetiva combinado com a hipótese de equivalência em deformações.

Ainda conforme Lemaitre (1992), a mecânica do dano surgiu a partir da teoria da plasticidade, inicialmente para reproduzir a fase de fluência terciária e posteriormente a fase de

amolecimento em materiais dúcteis e quase frágeis. Em virtude dessa origem, a cinemática do sólido danificado é baseada no conceito de deformação (ε) e a lei de evolução do dano nesses modelos relaciona dano com deformações locais.

Segundo Amorim et al. (2018), os pesquisadores desse campo de estudos esperavam que o mecanismo da teoria do dano pudesse eventualmente se tornar uma alternativa vantajosa à mecânica da fratura, o que nunca chegou a se concretizar devido principalmente ao chamado fenômeno da localização. A falha dos modelos da mecânica do dano clássica em descrever e representar esse fenômeno marcou o fim de um estágio da teoria. A mecânica da fratura é utilizada na prática da engenharia com muito mais frequência do que a mecânica do dano.

Como explicam Amorim et al. (2018), na mecânica experimental, em um ponto de vista físico, localização denota a formação de, por exemplo, bandas de cisalhamento com intensa descontinuidade de deformações em materiais quase frágeis, dúcteis ou em geo-materiais. Localização é, portanto, uma evidência experimental e até mesmo visual. Na mecânica estrutural, em um ponto de vista matemático, o termo localização é usado para se referir à perda de elipticidade das equações dos modelos de dano clássico que levam a descontinuidades no campo de deformação, problemas mal colocados e algoritmos numéricos dependentes de malha.

Para contornar o problema da localização, desenvolveu-se uma mecânica do dano moderna. Basicamente, de acordo com Peerlings et al. (1996), é feita uma modificação nas leis de evolução do dano por meio de funções peso (modelos não locais) e é introduzida uma variável cinemática modificada na lei constitutiva. O objetivo é controlar o dano e a descontinuidade de deformação durante a análise, levando em conta dessa forma a localização de dano. Essas modificações, no entanto, não são motivadas por uma melhor descrição física do fenômeno, o intuito é o desenvolvimento de modelos que levem a resultados numéricos objetivos. Além disso, as leis de evolução da mecânica do dano moderna desrespeitam um dos fundamentos da mecânica dos sólidos chamado de princípio da localidade que, segundo Pimenta (2006), afirma que as tensões atuantes em um ponto de um sólido deformável dependem apenas do movimento relativo de sua vizinhança, ou seja, fenômenos distantes de um ponto do sólido não o influenciam.

Apesar da importância, como foi brevemente introduzido, as teorias descritas até aqui apresentam desvantagens e limitações que impõem dificuldades e restrições na aplicação em problemas reais de engenharia. Como uma forma alternativa para a modelagem do comportamento estrutural, uma nova mecânica do dano tem sido desenvolvida desde o início dos anos 90, tendo início com o trabalho de Flórez-López (1993). Esse novo ramo da mecânica estrutural é chamado de mecânica do dano concentrado (MDC). A MDC aplica os principais

conceitos da mecânica da fratura e da mecânica do dano junto ao conceito de rótulas plásticas proveniente da teoria da plasticidade.

Até então, essa nova mecânica está limitada, no que se diz respeito a aplicações concretas, à análise de modelos de barras (vigas, pilares, pórticos e arcos). São diversas as aplicações para casos de concreto armado, seja em pórticos planos [Cippolina, López-Inojosa e Flórez-López (1995); Liu e Liu (2004); Araújo e Proença (2008); Faleiro, Oller e Barbat (2010); Alva e El Debs (2010); Toi e Hasegawa (2011); Perdomo et al. (2013); Santoro e Kunnath (2013), Amorim, Proença e Flórez-López (2013)] ou tridimensionais [Marante e Flórez-López (2003)]. Além de estudos em barras metálicas [Bai et al. (2016)], revestimento de túneis [Amorim, Proença e Flórez-López (2014a)] e arcos de alvenaria [Amorim, Proença e Flórez-López (2014b)]. Mais recentemente, também surgiram estudos com aplicações para o caso do concreto reforçado com fibras de aço [Oliveira (2017) e Apêndice C]

Nos modelos de barra, os efeitos inelásticos do dano e da plasticidade são concentrados em zonas de comprimento zero, chamadas de rótulas inelásticas. Essa abordagem é semelhante à da zona de processo de fratura, mas ao contrário da mecânica da fratura, essa nova hipótese não modifica a geometria da estrutura, apenas modifica a lei constitutiva, como ocorre na mecânica do dano. Além disso, diferentemente da mecânica do dano que adota conceitos de deformação como variável cinemática principal, a MDC nos casos uniaxiais adota como variável cinemática o conceito de rotação inelástica da rótula, conceito equivalente ao deslocamento de abertura da fissura da mecânica da fratura (AMORIM *et al.*, 2018).

Em termos gerais, pode-se dizer que a mecânica do dano está mais próxima da plasticidade do que da mecânica da fratura enquanto no caso da mecânica do dano concentrado, ocorre o oposto. A mecânica do dano concentrado foi desenvolvida no intuito de prover uma melhor descrição do fenômeno de deterioração estrutural em um contexto adequado para aplicações em engenharia civil. Além disso, ao mesmo tempo, os modelos em dano concentrado levam a resultados matematicamente objetivos (AMORIM *et al.*, 2018).

Para as análises estruturais mais comuns na engenharia, os elementos de pórtico são suficientes para representar bem o comportamento estrutural. Sendo assim, existe uma grande quantidade de modelos para pórticos baseados principalmente na teoria da plasticidade. Além disso, a maioria dos livros e textos base trabalham com essa unidade básica estrutural. Por outro lado, em alguns casos, certas estruturas devem ser modeladas como meios contínuos fazendo uso da teoria dos sólidos, o que demanda o desenvolvimento de modelos e elementos finitos bidimensionais ou mesmo tridimensionais.

Amorim (2016), com uma contribuição pioneira, apresenta uma extensão da MDC para meios contínuos bidimensionais, onde são apresentados problemas de placas e chapas. As análises preliminares apresentadas demonstram resultados objetivos e assim como nos casos uniaxiais, independentes de refinamento de malha. Em outras palavras, representam bem o problema da formação de bandas de localização que será melhor discutido no decorrer deste trabalho.

Alguns modelos baseados em elementos finitos que incluem bandas de localização já foram apresentados na literatura sobre o tema, a exemplo dos trabalhos de Belytschko, Fish e Engelmann (1988) e de Borja (2000). No entanto, a abordagem proposta neste trabalho é totalmente diferente. Como defendem Amorim et al. (2018), a hipótese fundamental é que a localização é um fenômeno separado que precisa da introdução de variáveis de estado específicas com suas respectivas leis de evolução. A variável de dano contínuo, portanto, não é a ferramenta mais adequada para descrever o fenômeno ocorrendo nas bandas de localização.

1.1.3. O Processo de Ruptura nos Materiais

Entender o processo de ruptura dos materiais é de suma importância para compreensão do fenômeno da localização. De acordo com Proença (2008), em termos de estrutura microscópica, ou seja, a nível atômico ou cristalográfico, os materiais tem naturezas bastante diferentes. No entanto, macroscopicamente, em todos é possível observar características semelhantes com relação ao comportamento estrutural, como por exemplo efeitos elásticos, plásticos, viscosos e de ruptura. Devido a essa semelhança, é possível empregar a mecânica dos sólidos e a termodinâmica para formular modelos constitutivos que representem os diferentes materiais e suas naturezas diversas em uma mesoescala, de modo que sejam aplicados em análises macroscópicas.

Ainda segundo Proença (2008), os mecanismos físicos que provocam as deformações e a ruptura nos materiais ocorrem, na realidade, em microescala, abaixo da mesoescala citada anteriormente onde se pode considerar os materiais como um meio contínuo. A dimensão da mesoescala é um fator importante pois deve garantir uma uniformidade representativa ao serem tomadas medidas do meio, evitando-se assim grandes gradientes que podem invalidar a resposta obtida. Na mesoescala corretamente escolhida, é possível a coleta de medidas representativas e a consideração do meio como contínuo, o que permite a aplicação da mecânica dos sólidos. Para isso, são definidos valores de volumes representativos do meio para cada tipo de material. Todavia, apesar da hipótese de continuidade do meio em mesoescala permitir desconsiderar a

microestrutura diversa de cada material, a modelagem matemática deve levar em conta os fenômenos físicos que se desenvolvem em microescala, de modo a gerar maior representatividade do modelo na descrição de determinado comportamento estrutural.

O processo que leva a ruptura ocorre com particularidades a depender do material sob solicitação. A seguir é descrito de modo simplificado, conforme Proença (2008), o processo para o caso de metais e concreto, que são provavelmente os materiais mais usados na engenharia estrutural.

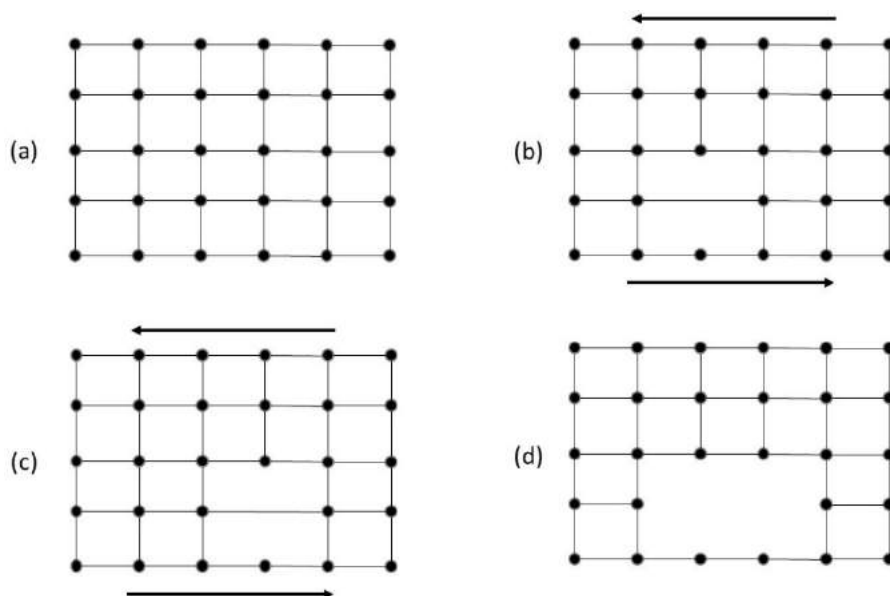
Os metais são formados, de modo geral, por uma rede de cristais com átomos em uma ordem bem definida. Considerando inicialmente que não existem defeitos nessa rede (Figura 1.3a), a fase elástica é representada pelo afastamento reversível entre átomos e a ruptura frágil é o resultado do rompimento das ligações atômicas. Já para explicar a fase plástica e a ruptura dúctil, é preciso admitir a presença de defeitos naturais que perturbam a rede bem ordenada. Um dos principais defeitos são as chamadas discordâncias que são interrupções na disposição geométrica bem ordenada das ligações atômicas (Figura 1.3b). Conforme ocorrerem solicitações, prioritariamente de cisalhamento que geram deslizamento da rede, a movimentação dessas discordâncias dá origem às deformações permanentes observadas macroscopicamente nos metais. A irreversibilidade do processo decorre em grande parte pois a movimentação das discordâncias provoca um salto para outra posição de modo que o arranjo ainda se mantém estável, sem rompimento de ligações e também sem variação volumétrica (Figura 1.3c).

O processo de danificação ocorre por meio do surgimento de microfissuras, no caso do concreto, ou microvazios, no caso do metal. Para formação das microfissuras, é necessária uma ruptura local, que pode ocorrer de forma frágil acompanhada de clivagem (escorregamento entre planos cristalográficos que de forma simplificada ocorre com ruptura das ligações atômicas) ou na forma de ruptura dúctil precedida de grandes deformações plásticas (grande acúmulo de discordâncias). A clivagem ocorre em geral em zonas de interface entre cristais onde a ruptura é facilitada. O processo de microfissuração e dano decorre, portanto, pelo acúmulo de discordâncias que acabam se cruzando, tornando o material mais frágil e gerando vazios maiores na rede cristalina (Figura 1.3d). Logo, pode-se concluir que a plasticidade e o dano são mecanismos diferentes, mas que sofrem influência indireta um do outro.

Em seguida, ocorre um processo de acúmulo de dano em uma região, ou seja, as microfissuras acabam por se aglomerar em alguma região prioritária, dando início ao processo de localização. Após isso, a propagação das microfissuras com formação de microfissuras e,

por fim, a ruptura total do material ocorre de forma bastante acelerada, já que o material já possui um plano de falha bem definido.

Figura 1.3 - Rede atômica (a), discordâncias (b), deslizamento (c) e acúmulo de discordâncias (d)



Fonte: O autor

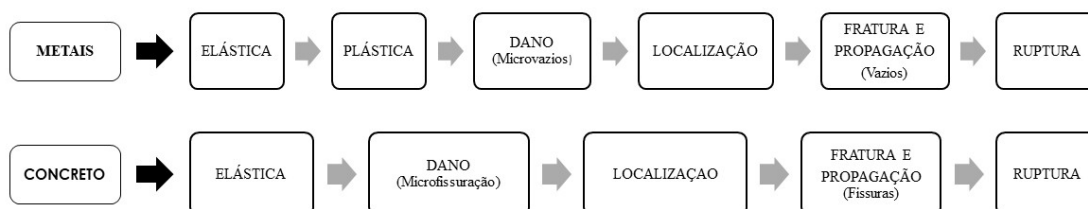
No caso do concreto, um material compósito formado por agregados e uma matriz cimentícia, devido à presença de microfissuras iniciais resultantes do processo de endurecimento, é difícil separar os fenômenos de deformação e ruptura como pode ser feito nos metais. Nesse caso, a plasticidade não faz muito sentido e as deformações permanentes são geradas a partir de mecanismos de ruptura frágil.

Em todo caso, inicialmente existe um breve regime elástico. Após isso, a perda de coesão entre a pasta e os agregados é o fenômeno responsável pela evolução de microfissuras e pelo aparecimento de deformações permanentes no concreto. Para níveis mais elevados de sollicitação, as microfissuras avançam para a pasta de cimento e ocorrem maiores escorregamentos entre grãos. Até aqui ainda não se tem grandes alterações de volume (algo semelhante à fase plástica nos metais). No início da fase de ruptura, as microfissuras se unem formando microfissuras com variação apreciável de volume. Essa transição é decorrente do processo de localização no concreto. A ruptura final resulta da propagação e união dessas microfissuras formando descontinuidades no sólido.

Logo, no caso de metais, o dano ocorre principalmente em microescala antes de evoluir para fratura. Já no caso de compósitos como o concreto, o dano já se manifesta em macroescala

com a propagação de microvazios existentes. Um resumo esquemático das fases do processo que leva a ruptura em metais e concreto está ilustrado na Figura 1.4.

Figura 1.4 - Resumo esquemático do processo de ruptura



Fonte: O autor

A mecânica da fratura lida com o crescimento de fissuras (macrofissuras) que levam a ruptura total, de modo que é ignorado a danificação prévia a formação da fissura. A modelagem já parte de uma fissura inicial. A formação da fissura é campo de estudo da mecânica do dano que explica a formação de microfissuras e a presença de dano distribuído. A localização pode ser entendida como o processo de transição entre uma situação de dano distribuído (microfissuração) e outra de dano concentrado ou localizado sob uma estreita faixa com descontinuidade de deformação (formação de fissura discreta).

1.2. OBJETIVOS

1.2.1. Objetivo Geral

O objetivo geral da pesquisa é contribuir com o desenvolvimento da mecânica do dano concentrado para a análise de problemas contínuos em meios bidimensionais, principalmente com relação à formação de bandas de localização, através da proposta de um novo elemento finito que gera resultados objetivos e independentes de malha.

1.2.2. Objetivos Específicos

São objetivos específicos deste trabalho:

- Propor um novo elemento finito para a análise de problemas de localização em meio bidimensional (chapas);
- Apresentar resultados numéricos objetivos, ou seja, convergentes e independentes de malha;

1.3. ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho se encaixa exclusivamente no ramo da mecânica estrutural com o estudo de um novo modelo matemático para análise de meios contínuos bidimensionais baseado na mecânica do dano concentrado. Atrrelado a isso, apresenta procedimentos e análises numéricas baseadas na proposta de um elemento finito para resolução de problemas estruturais, com foco no fenômeno da localização em chapas.

Com isso, pretende-se mostrar que a mecânica do dano concentrado se apresenta como uma teoria geral para analisar o comportamento não linear das estruturas que pode ser expandida para a análise de qualquer meio contínuo.

Na revisão bibliográfica são apresentados os principais conceitos da mecânica da fratura e da mecânica do dano, importantes para o escopo deste trabalho. Além disso, é descrito de forma simples o fenômeno físico da localização o qual se apresenta como um importante efeito durante o processo de colapso estrutural. Também é demonstrado como os modelos de dano clássico resultam em problemas dependentes de malha e em seguida são discutidos aspectos da mecânica do dano moderna. Por fim, é apresentado como o modelo de dano concentrado leva a resultados objetivos e independentes de malha, primeiramente em um caso uniaxial e em seguida em um caso bidimensional.

Na parte metodológica e de resultados, é apresentado o novo elemento finito proposto neste trabalho e em seguida é descrito como ocorre a implementação numérica em um programa para análise por elementos finitos. Por fim, são apresentados e discutidos exemplos numéricos de aplicação do elemento na análise de problemas de chapa.

Ao final, nas conclusões, são feitos os últimos comentários acerca dos resultados e são propostas diversas ideias para melhoria e desenvolvimento do tema em trabalhos futuros.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1. FUNDAMENTOS DA MECÂNICA DA FRATURA

Os modelos provenientes das teorias da elasticidade e da plasticidade representam o corpo sólido com contornos fixos, ou seja, em geral, não é permitida a modificação durante análise. Com isso, torna-se pouco eficiente a modelagem da fissuração por essas teorias, sendo essa uma grande limitação já que se trata de um importante fenômeno no processo de falha estrutural. No intuito de representar a propagação de fissuras, a mecânica da fratura difere drasticamente das teorias anteriores, pois permite, de forma eficiente, a modificação dos contornos do sólido durante análise. O objetivo principal é determinar as condições necessárias para a propagação de fissuras em sólidos elásticos ou elasto-plásticos (FLÓREZ-LÓPEZ; MARANTE; PICÓN, 2015).

Como explica Amorim (2016), o problema que motivou o surgimento de pesquisas que culminariam na mecânica da fratura ocorreu durante o século XX, época na qual ocorreram vários acidentes devido a nucleação e propagação de fissuras, especialmente em navios e aviões de guerra. Os primeiros estudos em busca de um critério de fratura se baseavam no tradicional balanço de forças aplicadas e mesmo após várias tentativas, esses estudos não foram capazes de explicar porque entre estruturas com solicitações, método de fabricação e geometria idênticas, algumas entravam em colapso enquanto outras não. Os diversos testes apontavam que o processo de fratura se inicia em regiões com entalhes geométricos ou furos para conexão de rebites devido a alta concentração de tensões nessas regiões.

É bastante comum a necessidade de perfurar elementos estruturais para diversos fins, sendo uma prática comum na montagem da fuselagem de aviões ou nos cascos de navios. No entanto, tal modificação gera uma zona susceptível a concentração de tensões. Segundo Flórez-López, Marante e Picón (2015), um importante conceito atrelado ao problema é o Fator de Concentração de Tensão (FCT) que é dado pela razão entre a tensão local máxima (tensão na região do furo, por exemplo) e a tensão média na estrutura (tensão aplicada).

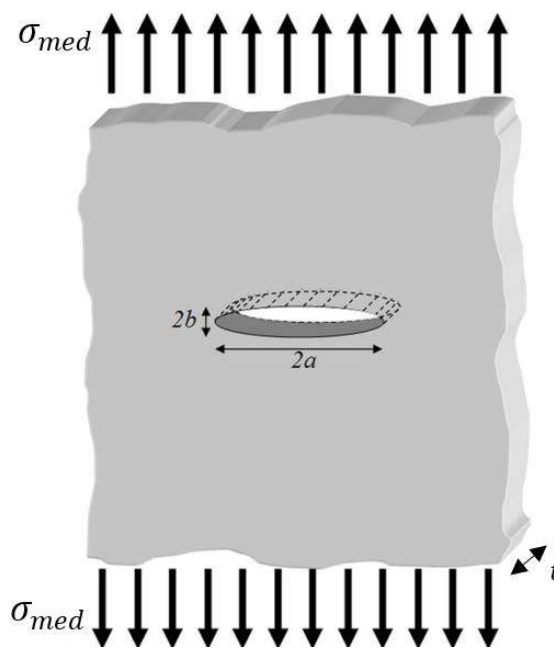
$$FCT = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{med}} \quad (2.1)$$

Ainda segundo Flórez-López, Marante e Picón (2015), um assunto base estudado na teoria da elasticidade e na tradicional resistência dos materiais é a determinação do FCT para

diferentes alterações na estrutura, a exemplo de furos e entalhes. Considerando o caso de uma chapa infinita de espessura t com um furo central em forma de uma elipse de diâmetro maior $2a$ e diâmetro menor $2b$ submetida a uma tensão constante σ_{med} distante do furo (Figura 2.1), o fator de concentração de tensão na região do furo para o caso linear elástico é dado por:

$$FCT = \left(1 + 2 \frac{a}{b}\right) \quad (2.2)$$

Figura 2.1 - Chapa infinita com furo elíptico



Fonte: Flórez-López, Marante, Picón (2015)

Com base na Figura 2.1, uma fissura pode ser modelada como uma elipse fazendo b tender a zero, o que resultaria, com base no FCT, em uma tensão elástica máxima tendendo ao infinito na região do furo, independente da magnitude da tensão média aplicada na chapa. O mesmo ocorre para qualquer estrutura ao se analisar a tensão na ponta de uma fissura com base no FCT. Ou seja, segundo essa abordagem, qualquer estrutura com presença de fissura deveria entrar em colapso mesmo com tensões mínimas aplicadas, o que obviamente contradiz o problema discutido anteriormente onde fissuras não propagam em algumas estruturas. Com isso, fica claro que o FCT, conceito baseado em forças aplicadas, é ineficiente e não pode ser usado como critério para propagação de fissuras (FLÓREZ-LÓPEZ; MARANTE; PICÓN, 2015).

A abordagem adequada para o problema em questão se dá por meio de um balanço de energia, a partir do qual se originou a mecânica da fratura. Baseado em trabalhos anteriores, Griffith (1921, 1924), propôs quantificar o processo de fratura por um critério energético usando a termodinâmica dos processos irreversíveis para formular um balanço de energia em função do comprimento da fissura ($2a$). Ver Gdoutos (2005) para maiores detalhes sobre a abordagem de Griffith.

De modo simples, para compreensão do critério energético, conforme Flórez-López, Marante e Picón (2015), considere a energia potencial EP de uma força P que é dada por:

$$EP = -P\Delta \quad (2.3)$$

onde Δ é o deslocamento da força. Para o caso de um sólido rígido de massa M , a força gravitacional é dada por $-Mg$ (sentido positivo para cima), onde g é a aceleração da gravidade. Assim, se o corpo é elevado a uma distância Δ , a energia potencial é dada por: $Mg\Delta$.

A energia potencial EP também pode ser entendida como o trabalho externo W_{ext} de uma força P que é dado por:

$$W_{ext} = P\Delta \leftrightarrow EP = -W_{ext} \quad (2.4)$$

Considere agora um sólido elástico de rigidez S submetido a uma força P que induz alongamentos Δ no sólido:

$$P = S\Delta \quad (2.5)$$

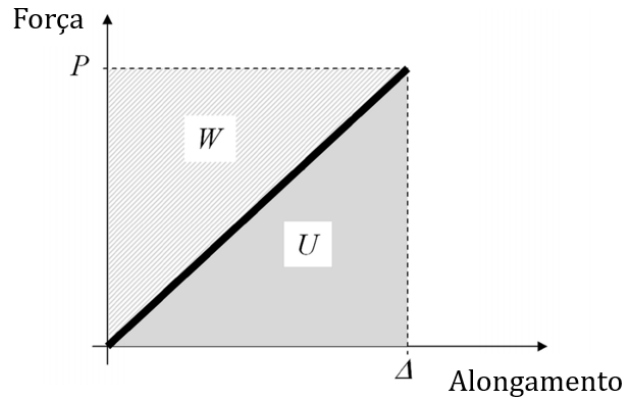
O trabalho total necessário para deformar a estrutura é armazenado no sólido sob uma parcela de energia chamada de energia de deformação U , representada pela área no gráfico da Figura 2.2:

$$U = \int_0^{\Delta} P d\Delta = \frac{1}{2} S \Delta^2 = \frac{1}{2} P \Delta \quad (2.6)$$

Outra área pode ser retirada da curva força vs. alongamento (Figura 2.2), correspondendo a chamada energia de deformação complementar W :

$$W = \int_0^P \Delta dP = \frac{1}{2S} P^2 = \frac{1}{2} F P^2 \quad (2.7)$$

Figura 2.2 - Energia de deformação em um sólido sujeito a uma força P



Fonte: Flórez-López, Marante, Picón (2015)

onde $F = 1/S$ é a flexibilidade do sólido. Para o caso de um sólido linear elástico, as duas parcelas de energia são iguais (FLÓREZ-LÓPEZ; MARANTE; PICÓN, 2015)

Desprezando parcelas térmicas, a energia total ET em um sólido elástico é então definida pela soma da energia potencial com a energia de deformação:

$$ET = U + EP \quad (2.8)$$

Conforme Flórez-López, Marante e Picón (2015), para o caso de um sólido elástico com uma área de superfície de fissura de $4at$, uma nova parcela de energia deve ser considerada. A chamada energia de superfície ES é a energia necessária para o surgimento de novas superfícies de fissura e é proporcional a superfície da fissura, ou seja, ES aumenta na medida em que a fissura se propaga.

$$ES = 4\Gamma at \quad (2.9)$$

onde Γ é a energia de superfície por unidade de área.

Portanto, a energia total do sólido elástico com presença de fissura é resultado da soma da energia de deformação, do trabalho das forças externas e da energia superficial característica do material:

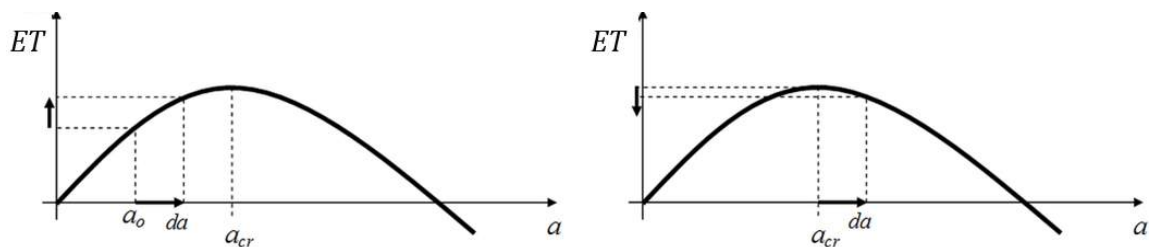
$$ET = U + EP + ES \quad (2.10)$$

Voltando ao problema da chapa infinita, pode ser demonstrado que considerando tensões planas, a energia total resulta em:

$$ET = U + EP + ES = U_0 - \frac{\pi \sigma_{med}^2}{E} a^2 + 4\Gamma a \quad (2.11)$$

onde U_0 é a energia de deformação da chapa sem fissura, E é a módulo de Young, σ_{med} é a tensão aplicada e Γ é a energia de superfície elástica do material. Ao se traçar a curva de energia total vs. comprimento de fissura do problema, observa-se que a mesma corresponde a uma parábola côncava (Figura 2.3). Por simples observação gráfica, essa curva explica porque existem fissuras que não se propagam mesmo com um fator de concentração de tensão tendendo ao infinito. Considere o caso de uma fissura inicial pequena a_0 cujo comprimento se encontra na parte esquerda da curva, antes do pico. Supondo que a fissura se propague e, portanto, o comprimento aumente de a_0 para $a_0 + da$, segundo o gráfico, esse acréscimo deve ser acompanhado também por um aumento da energia total. No entanto, esse processo é fisicamente impossível já que a força externa agindo no problema (σ_{med}) é constante nessa análise. Logo, se nenhum trabalho está sendo adicionado à estrutura, não importa quão alto seja o fator de concentração de tensão, a propagação da fissura não pode ocorrer nessas condições. Ou seja, a tensão não é a força condutora da fissuração (depende, mas não conduz) (FLÓREZ-LÓPEZ; MARANTE; PICÓN, 2015).

Figura 2.3 - Energia total em função do comprimento de fissura



Fonte: Flórez-López, Marante, Picón (2015)

Considere agora o caso de uma fissura maior a_{cr} cujo comprimento corresponda ao pico da curva ou qualquer fissura de comprimento maior. Se a fissura propaga e seu comprimento

aumenta para $a_{cr} + da$, de acordo com o gráfico, a energia total diminui dessa vez. Esse processo é fisicamente possível e lógico já que a energia estaria sendo transformada, por exemplo, em energia cinética na medida que a estrutura rompe. Se a propagação da fissura é energeticamente possível, o processo necessariamente irá ocorrer já que o fator de concentração de tensão tende ao infinito. Com isso, pode-se constatar que existe um comprimento crítico de fissura para cada conjunto de forças externas de modo que fissuras menores que a crítica não propagam e fissuras maiores propagam (FLÓREZ-LÓPEZ; MARANTE; PICÓN, 2015).

Ainda conforme Flórez-López, Marante e Picón (2015), a equação (2.11) só é válida para o caso de uma chapa infinita submetida a tração uniforme, no entanto, para outras estruturas e outros tipos de carregamentos, a mesma conclusão ainda é válida já que o mecanismo é o mesmo: dado um estado de solicitações, a energia total é uma função côncava do comprimento da fissura e apresenta um pico de energia para um comprimento crítico da fissura. Portanto, em termos gerais, a propagação da fissura só é possível se a derivada da energia total com relação ao comprimento de fissura for igual a zero.

$$\frac{dET}{da} = \frac{d(U + EP + ES)}{da} = \frac{d(U + EP)}{da} + \frac{d(ES)}{da} = 0 \quad (2.12)$$

$$G = R, \text{ onde } G = -\frac{d(U + EP)}{da} \text{ e } R = \frac{d(ES)}{da} \quad (2.13)$$

O termo G é chamado de taxa de liberação de energia ou força condutora da fissura e R é a resistência à fissuração. Se $G < R$, a fissura não pode propagar. A propagação pode ocorrer apenas se $G = R$, sendo esse o chamado critério de Griffith. G pode ser calculado por análise estrutural, já R precisa ser obtido por meio de uma análise experimental e pode ser uma função do comprimento da fissura.

Segundo Gdoutos (2005), a propagação por sua vez pode ocorrer de forma estável ou instável. A instabilidade nesse caso significa um processo progressivo mesmo para uma solicitação constante por exemplo, já a estabilidade indica um processo dependente de um incremento de solicitação. O critério de estabilidade da propagação depende da derivada do critério de Griffith em relação ao comprimento da fissura. Sendo $G = R$ em qualquer caso,

$$\frac{dG}{da} < \frac{dR}{da} \rightarrow \text{Propagação estável} \quad (2.14)$$

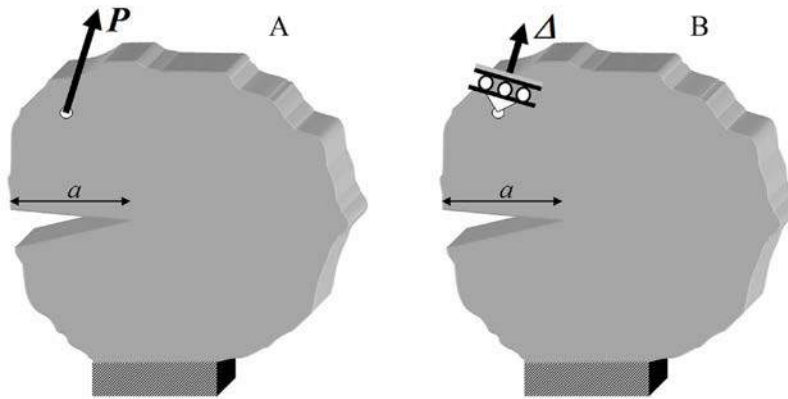
$$\frac{dG}{da} \geq \frac{dR}{da} \rightarrow \text{Propagação instável}$$

ou seja, se a taxa de crescimento da resistência a fissuração for menor ou igual a taxa de crescimento da força condutora da fissuração, a propagação será instável, caso contrário será estável.

Considerando agora uma estrutura qualquer com uma fissura submetida a uma força externa P (Figura 2.4a), a flexibilidade da estrutura depende do comprimento da fissura e, portanto, do deslocamento resultante também. A força condutora da fissura nesse caso é dada por:

$$G = -\frac{d(U + EP)}{da} = \frac{d}{da} \left(\frac{1}{2} P\Delta(a) - P\Delta(a) \right) = \frac{1}{2} \frac{dF(a)}{da} P^2 \quad (2.15)$$

Figura 2.4 - Estrutura sujeita a força imposta (a) e a deslocamento imposto (b)



Fonte: Flórez-López, Marante, Picón (2015)

Já para o caso de a estrutura estar submetida a um deslocamento imposto (Figura 2.4b):

$$G = -\frac{d(U + EP)}{da} - \frac{d}{da} \left(\frac{1}{2} P(a)\Delta \right) = \frac{1}{2} \frac{dS(a)}{da} \Delta^2 \quad (2.16)$$

Conforme Flórez-López, Marante e Picón (2015), note que as expressões de G são equivalentes, basta substituir $F = 1/S$ e aplicar (2.5) em (2.15) chegando-se ao mesmo resultado de (2.16). Portanto, pode-se calcular G em função tanto da rigidez quanto da flexibilidade da estrutura com relação ao comprimento de fissura. No entanto, um fato

importante é que, conforme Broek (1984), em relação a estabilidade da propagação, solicitações em força geram uma propagação instável, enquanto solicitações em deslocamento geram uma propagação estável.

Voltando para o caso da chapa infinita, a condição de propagação de fissura $G = R$ é então expressa como:

$$-\frac{d}{da} \left[U_0 - \frac{\pi \sigma_{med}^2}{E} a^2 \right] = \frac{d}{da} [4\Gamma a] \leftrightarrow 2 \frac{\pi \sigma_{med}^2}{E} a = 4\Gamma \quad (2.17)$$

Tal condição de instabilidade com relação a fissuração pode ser reescrita como:

$$\sigma_{med} \sqrt{a} = \sqrt{\frac{2E\Gamma}{\pi}} \quad (2.18)$$

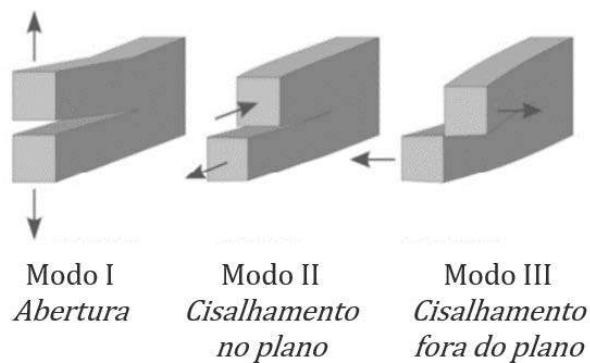
A parcela a direita da igualdade apresenta apenas coeficientes constantes e pode ser caracterizada como um parâmetro do material. Assim, a equação mostra que a fissura irá crescer apenas se o produto $\sigma_{med} \sqrt{a}$ atingir tal parâmetro. Ou seja, para que uma fissura se propague, deve-se aumentar o seu comprimento ou a solicitação aplicada. Essa conclusão foi experimentalmente verificada por Griffith (1921, 1924) nos seus estudos em chapas de vidro. Os trabalhos desenvolvidos por Griffith foram a gênese do que agora é chamado de mecânica da fratura (Ver Broek (1984) para maior profundidade no assunto).

Apesar da eficácia do balanço de energia de Griffith, obter tal relação para problemas mais complexos é uma tarefa desafiadora pois é necessário calcular o valor de G para cada caso em específico e conhecer experimentalmente R . Tendo isso em vista, Irwin (1957) propôs um novo critério baseado em uma nova quantidade, chamada de Fator de Intensidade de Tensão (FIT), relacionada a distribuição de tensões na região da fissura. Esse novo fator tem o objetivo de superar o FCT para análises de fratura, permitindo a análise de tensão próximo a ponta da fissura. Nessa nova abordagem, qualquer comportamento de fissuração pode ser expresso pela combinação de três modos de solicitação (Figura 2.5): abertura (modo I), cisalhamento no plano ou escorregamento (modo II) e cisalhamento fora do plano ou rasgamento (Modo III). Cada modo de solicitação está atrelado a um FIT: K_I , K_{II} e K_{III} respectivamente. Esses fatores representam a medida do esforço que tende a provocar a abertura do defeito e dependem da geometria e das solicitações. Irwin mostrou ainda que se pode calcular a taxa de liberação de

energia (G) a partir dos fatores de intensidade de tensão. Com essa abordagem, existem valores de FIT críticos para cada modo de sollicitação, de modo que o critério de Irwin, de modo isolado, é dado por:

$$\begin{aligned} K_I &= K_{ICrit} \\ K_{II} &= K_{IICrit} \\ K_{III} &= K_{IIICrit} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Figura 2.5 - Modos de fratura



Fonte: Amorim (2016)

De acordo com Amorim (2016), no problema fundamental de Griffith, apenas o modo I está ativo (a depender do problema, pode haver a combinação de dois ou até mesmo dos três modos). Considerando tensões planas, a taxa de liberação de energia pode ser expressa como:

$$G = \frac{K_I^2}{E} \quad (2.20)$$

Logo, o fator de intensidade de tensão é agora expresso pela tensão aplicada:

$$2 \frac{\pi \sigma_{med}^2}{E} a = \frac{K_I^2}{E} \leftrightarrow K_I = \sigma_{med} \sqrt{2\pi a} \quad (2.21)$$

com isso, a condição de instabilidade ocorre para valores críticos de FIT, por exemplo, $K_c = \sigma_{cr} \sqrt{2\pi a}$, onde σ_{cr} é o valor crítico para a tensão aplicada.

A mecânica da fratura é uma ferramenta poderosa para avaliação da integridade estrutural como no caso da aviação em que fissuras na fuselagem são monitoradas a cada pouso,

no entanto, apresenta algumas limitações. As análises demandam grande esforço computacional e, portanto, são inconvenientes para casos de estruturas com uma grande distribuição de fissuras propagando simultaneamente. Além disso, a teoria descreve a degradação estrutural de forma global por meio da modificação dos contornos do elemento, assumindo para isso um comportamento elástico ou elasto-plástico do material. No entanto, na verdade, tem se observado uma intensa degradação de forma local precedendo a propagação da fissura, e essa degradação local não é considerada na elasticidade ou plasticidade (FLÓREZ-LÓPEZ; MARANTE; PICÓN, 2015).

Além disso, a mecânica da fratura é baseada na análise de fissuras existentes, o que especialmente em condições de carregamento cíclico pode ser muito tarde para evitar um desastre já que a partir da propagação, o colapso tende a acontecer em pouco tempo. Sendo assim, o estado antecedente a formação da fissura e a evolução do dano interno antes de microfissuras se tornarem visíveis precisa ser entendido (LEMAITRE, 1992).

De fato, a mecânica da fratura se preocupa com a descrição da propagação da fissura, explicando quando, como e até mesmo em qual direção o processo ocorre. Para isso, considera-se a existência de uma fissura previamente à análise, antes da aplicação das solicitações externas. Obviamente, essa é uma limitação para casos reais de engenharia, onde nem sempre se tem uma fissura inicial. Tendo isso em mente, é importante o entendimento dos processos que levam à formação das fissuras, fenômeno esse que é alvo da mecânica do dano.

2.2.FUNDAMENTOS DA MECÂNICA DO DANO

Para alguns problemas, os fenômenos inelásticos ocorrem devido a distribuição difusa de microfissuras ou outros microdefeitos que afetam a integridade do material. Um trabalho pioneiro sobre integridade dos materiais foi proposto por Kachanov (1958) e posteriormente desenvolvido por Rabotnov (1968). Após isso, com base nesses trabalhos, Lemaitre e Chaboche (1990) usaram a termodinâmica dos processos irreversíveis para formular, de maneira formal, a chamada mecânica do dano contínuo.

De acordo com Flórez-López, Marante e Picón (2015), na mecânica do dano, a degradação dos materiais ocorre por meio de microdefeitos (microfissuras ou micro vazios) que são muito pequenos para serem considerados fissuras discretas como na mecânica da fratura, mas não pequenos o suficiente para serem desprezados. Essa mecânica está baseada na introdução de uma variável interna que mede a densidade desses microdefeitos e tem por

objetivo descrever a evolução dos mesmos em estruturas sujeitas a carregamentos termomecânicos.

Por simplicidade, adotando a hipótese de dano isotrópico, conforme Flórez-López, Marante e Picón (2015), considere um elemento danificado com uma seção transversal de área total A e área de microdefeitos A_d , o dano do elemento (perda de resistência mecânica) é definido como:

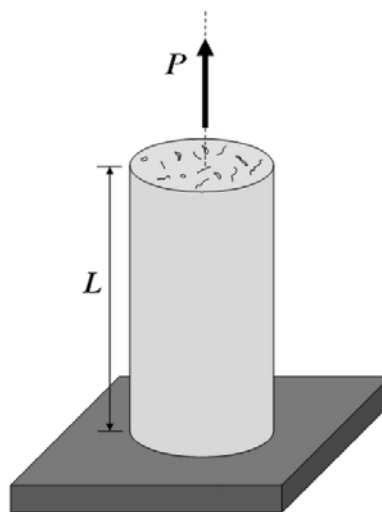
$$\omega = \frac{A_d}{A} \quad (2.22)$$

Note que ω pode apresentar valores entre zero (material intacto) e um (elemento totalmente rompido).

Segundo Flórez-López, Marante e Picón (2015), para implementação computacional do dano, é necessário a introdução da variável nas equações constitutivas. Uma maneira simples e efetiva de fazê-lo é adotando uma medida adicional de tensão chamada de tensão efetiva. Considere novamente um caso uniaxial onde um elemento de barra danificado é submetido a uma força axial P (Figura 2.6), a tensão normal média σ na barra é dada por: $\sigma = P/A$. A tensão efetiva $\bar{\sigma}$ na barra é então definida como:

$$\bar{\sigma} = \frac{P}{A - A_d} \quad (2.23)$$

Figura 2.6 - Elemento danificado



Fonte: Flórez-López, Marante, Picón (2015)

Ou seja, quanto maior for o dano, maior a tensão efetiva já que temos uma área resistente menor, chamada de área de resistência efetiva que é dada por $\bar{A} = A - A_d$.

Uma relação entre a tensão efetiva e a tensão normal convencional é então obtida introduzindo a definição de dano (2.22) em (2.23):

$$\bar{\sigma} = \frac{P}{A - \omega A} = \frac{\sigma}{1 - \omega} \quad (2.24)$$

Note que a tensão efetiva é igual a tensão normal para o caso de um elemento intacto e tende ao infinito quando o dano tende a um.

Baseado na observação anterior, Lemaitre e Chaboche (1990) propuseram um outro conceito fundamental da mecânica do dano contínuo, chamado de hipótese de equivalência em deformações, o qual estabelece que o comportamento de um material danificado pode ser descrito pelas mesmas equações de um material intacto se a medida de tensão normal σ for substituída pela efetiva $\bar{\sigma}$. Desse modo, basicamente, qualquer modelo por ser modificado para incluir o dano na análise. Sendo assim, de acordo com essa hipótese, a lei elástica para um material danificado é dada por:

$$\bar{\sigma} = E\varepsilon \Rightarrow \sigma = (1 - \omega)E\varepsilon \quad (2.25)$$

Note que o dano penaliza a rigidez efetiva $\bar{E} = (1 - \omega)E$ do material. A mesma lei elástica (2.25) também pode ser facilmente reescrita em termos de flexibilidade:

$$\varepsilon = \frac{1}{(1 - \omega)E} \sigma \quad (2.26)$$

Conforme demonstra Flórez-López, Marante e Picón (2015), uma forma conveniente de reescrever a mesma lei elástica (2.26) é enxergar a deformação ε como a composição de dois termos, um termo elástico e um termo adicional relacionado ao dano.

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^\omega ; \text{ onde } \varepsilon^e = \frac{1}{E} \sigma \text{ e } \varepsilon^\omega = \frac{\omega}{(1 - \omega)E} \sigma \quad (2.27)$$

A lei elástica pode agora ser interpretada da seguinte forma: o material apresenta uma flexibilidade inicial $1/E$ e então o processo de degradação induz um aumento da flexibilidade do material $\omega/E(1 - \omega)$ que resulta em um termo de deformação adicional ε^ω chamado de deformação de dano. O termo relacionado ao dano começa em zero e tende ao infinito quando o dano tende a 1.

Se o material é elasto-plástico, como no caso de materiais metálicos, a lei elástica é:

$$\bar{\sigma} = E(\varepsilon - \varepsilon^p) \Rightarrow \sigma = (1 - \omega)E(\varepsilon - \varepsilon^p) \quad (2.28)$$

ou em termos de flexibilidade:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p + \varepsilon^\omega ; \text{ onde } \varepsilon^e = \frac{1}{E}\sigma \text{ e } \varepsilon^\omega = \frac{\omega}{(1 - \omega)E}\sigma \quad (2.29)$$

Ou seja, de acordo com a hipótese de equivalência em deformação, a deformação total pode ser decomposta em um termo elástico que obedece a lei de Hooke, um termo plástico e um termo dependente do dano. Obviamente, se $\omega = 0$ então $\varepsilon^\omega = 0$; caso contrário, $\varepsilon^\omega \neq 0$ para um certo valor de σ (AMORIM, 2016).

As funções de escoamento também podem ser modificadas do mesmo modo de uma forma simples. Como exemplifica Flórez-López, Marante e Picón (2015), no caso de uma função de escoamento perfeitamente plástica, obtém-se:

$$f = |\bar{\sigma}| - \sigma_y = \left| \frac{\sigma}{1 - \omega} \right| - \sigma_y \leq 0 \quad (2.30)$$

Apesar de por definição a variável de dano atingir valores próximos a 1, fisicamente os materiais colapsam com valores menores de dano, chamados de valores de dano último ω_u . De acordo com Lemaitre e Chaboche (1990), os materiais usualmente apresentam ω_u entre 0,5 a 0,9.

Agora, conforme o trabalho de Marigo (1985), considere um critério generalizado de Griffith aplicado a mecânica do dano contínuo:

$$G^\omega - R^\omega \leq 0 \quad (2.31)$$

onde G^ω é a taxa de liberação de energia de um elemento danificado ou força condutora do dano e R^ω é a função de resistência ao dano. A taxa de liberação de energia pode ser expressa como:

$$G^\omega = -\frac{dU}{d\omega} = \frac{dW}{d\omega} \quad (2.32)$$

Sendo U a energia de deformação e W a energia complementar, dadas por:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \sigma \varepsilon = \frac{1}{2} (1 - \omega) E \varepsilon^2 \\ W &= \frac{1}{2} \sigma \varepsilon = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{(1 - \omega) E} \end{aligned} \quad (2.33)$$

Finalmente, a taxa de liberação de energia de um elemento danificado pode ser escrita em termos de rigidez ou flexibilidade:

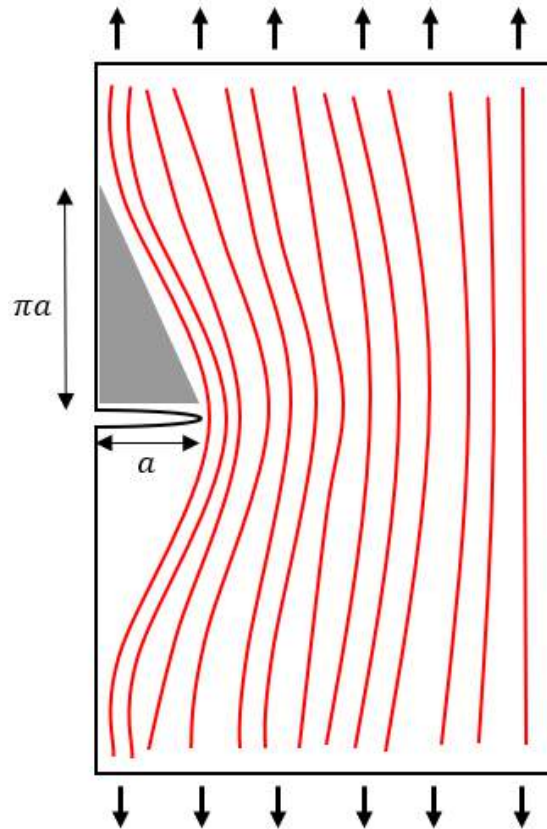
$$G^\omega = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{(1 - \omega)^2 E} \quad (2.34)$$

O termo “força condutora da fissura” pode ser melhor entendido ao se analisar o problema dentro da abordagem da termodinâmica. A expressão $G^\omega = dW/d\omega$ mostra que ao se derivar a energia complementar em relação ao dano, o resultado é o termo G^ω . Isso pode ser entendido da seguinte forma: interpretando a energia complementar como uma energia livre, G^ω é a força que produz ou gera o dano no material, ou seja, é a força que conduz o processo de fissuração representado pela variável de dano. Essa mesma ideia pode ser constatada ao se derivar a energia complementar em relação a deformação ε , resultando na seguinte expressão: $\sigma = dW/d\varepsilon$. Nesse caso, a tensão é responsável por gerar deformação no material, ou seja, é a força condutora de deformação.

Já o termo taxa de liberação de energia tem origem na seguinte constatação: com base na Figura 2.7, que representa metade do problema da chapa apresentado anteriormente, observa-se que a região no entorno da fissura ou abertura apresenta tensões nulas, ou seja, a energia interna contida nessa parcela do sólido é liberada para ser transformada em por exemplo, energia cinética para movimentação de abertura da fissura. Sendo esse um processo

irreversível. Na equação (2.11), podemos observar um termo que tem relação com a área descrita na Figura 2.7, quanto maior a fissura, maior essa área e portanto mais energia é liberada.

Figura 2.7 - Campo de tensões em uma chapa fissurada



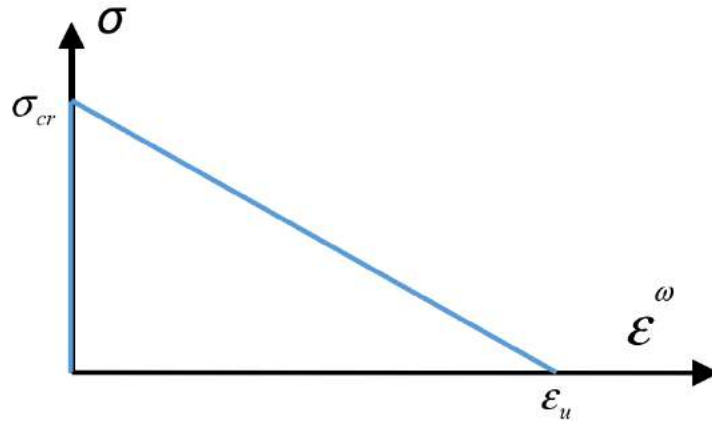
Fonte: O autor

Segundo Amorim et al. (2018), baseado no novo conceito de deformação de dano, desprezando a deformação plástica e considerando apenas o caso de cargas monotônicas e positivas, a equação constitutiva de um modelo em dano pode ser escrita como:

$$\varepsilon = \frac{1}{E}\sigma + \varepsilon^{\omega} ; \quad g = \sigma - \sigma_{cr}\left(1 - \frac{\varepsilon^{\omega}}{\varepsilon_u}\right) \leq 0 \quad (2.35)$$

A nova forma da lei de evolução do dano é representada na Figura 2.8.

Figura 2.8 - Tensão em função da deformação relacionada ao dano



Fonte: Amorim et al. (2018)

Como foi visto, a teoria do dano é baseada na introdução de três conceitos básicos: a variável de dano contínuo, a tensão efetiva e a hipótese de equivalência em deformações. Com esses conceitos, qualquer modelo pode ser alterado de forma simples para levar em conta o dano durante análise. No entanto, como em qualquer teoria, a mecânica do dano contínuo também apresenta limitações e desvantagens. Uma das principais é que a formulação pode levar a problemas matematicamente mal colocados e dependentes de malha, ou seja, em alguns casos, um número infinito de soluções pode satisfazer as equações da teoria quando soluções localizadas são escolhidas. Por se tratar de um modelo que tenta reproduzir um comportamento real, obviamente, em termos práticos, isso quer dizer que o problema não foi resolvido e são necessárias novas ideias para obter a solução certa dentre as infinitas possíveis. Esse aspecto matemático está relacionado com o fenômeno físico da localização (FLÓREZ-LÓPEZ; MARANTE; PICÓN, 2015).

2.2.1. O Problema da Unicidade de Solução

Por uma questão de simplicidade, conforme Amorim et al. (2018), a dependência de malha da mecânica do dano clássico é ilustrada aqui para um caso uniaxial. Considere o seguinte problema, proposto inicialmente por Peerlings et al. (1996): uma barra de comprimento L e área de seção transversal A é submetida a deslocamentos prescritos u em ambas as extremidades (Figura 2.9a). A equação constitutiva em dano clássico é definida por:

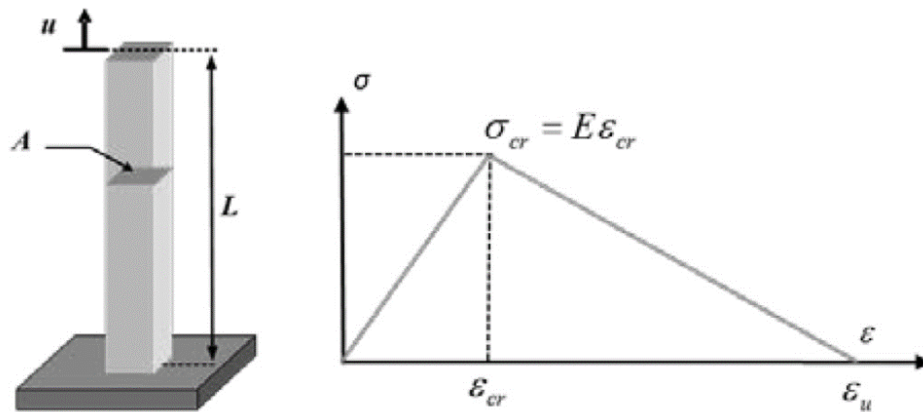
$$\sigma = (1 - \omega)E\epsilon \quad (2.36)$$

$$G(\varepsilon) - R(\omega) \leq 0 \leftrightarrow g = |\varepsilon| - R(\omega) \leq 0 \quad (2.37)$$

$$R(\omega) = \frac{\varepsilon_{cr}\varepsilon_u}{\varepsilon_u + \omega(\varepsilon_{cr} - \varepsilon_u)} ; \quad G(\varepsilon) = |\varepsilon|$$

onde a primeira equação é a lei de elasticidade e a segunda representa a função de dano (ou lei de evolução do dano) que é um conceito análogo a função de escoamento na plasticidade. $G(\varepsilon)$ é a taxa de liberação de energia adotada, $R(\omega)$ é a função de resistência ao dano, ω é a variável de dano contínuo convencional, σ e ε tem o significado usual e E , ε_{cr} e ε_u são parâmetros do material como indicado na Figura 2.9b.

Figura 2.9 - Barra uniaxial (a) e tensão em função da deformação no modelo de dano (b)



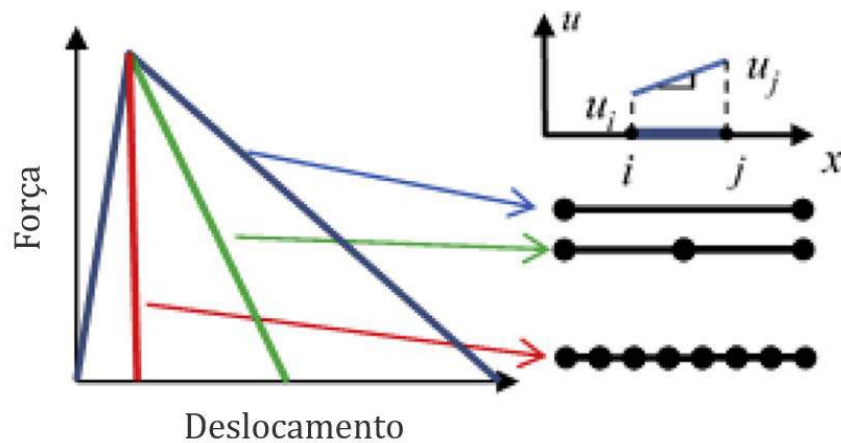
Fonte: Amorim et al. (2018)

Com isso, pode ser feita uma análise do problema por meio do método dos elementos finitos com elementos de dois nós. Considere o caso onde o dano é localizado no primeiro elemento da malha por meio da introdução de um defeito no material computado através da variável de dano. Como é sabido, a curva de força em função do deslocamento é dependente de malha quando soluções localizadas em um único elemento são escolhidas. Ao se refinar a malha, ou seja, aumentar o número de elementos, as soluções são divergentes e na realidade, infinitas (Figura 2.10) (AMORIM *et al.*, 2018).

De acordo com Amorim (2016), uma outra forma de demonstrar a dependência de malha é adotando-se uma malha que contenha dois elementos finitos, com comprimentos l_1 e l_2 ($l_1 + l_2 = L$) (Figura 2.11a). Ao se considerar o dano localizado no primeiro elemento (l_1), a dependência de malha é ilustrada variando-se o comprimento l_1 . Note que o comprimento total L é constante (Figura 2.11b).

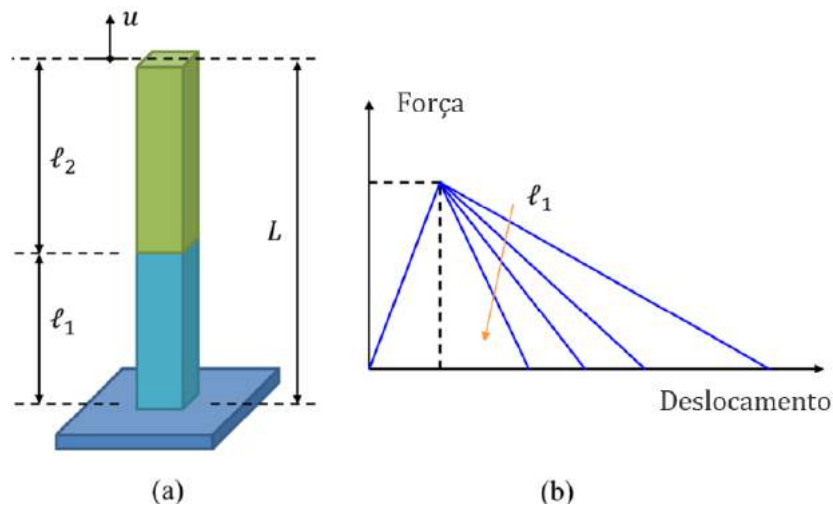
Segundo Amorim et al. (2017), o problema da infinidade de soluções localizadas durante análise por elementos finitos é consequência da escolha dos modelos de dano clássico em relacionar dano com deformações locais. Essa escolha gera perda de elipticidade do problema, levando a descontinuidades no campo de deformação, problemas mal colocados e algoritmos numéricos dependentes de malha.

Figura 2.10 - Força em função do deslocamento para malhas com um, dois e sete elementos



Fonte: Amorim et al. (2018)

Figura 2.11 - Malha de elemento finito (a) e força em função do deslocamento para malha com dois elementos com diferentes comprimentos (b)



Fonte: Amorim (2016)

2.3. FUNDAMENTOS DA TEORIA DA LOCALIZAÇÃO

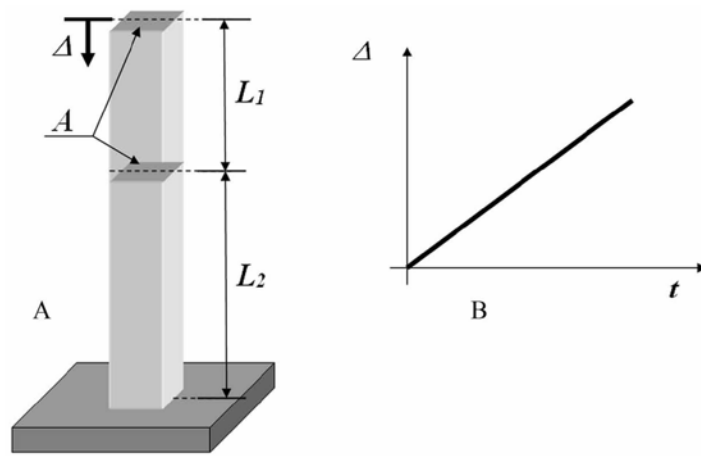
Localização de deformações é um importante mecanismo de falha em estruturas. Observações experimentais mostram que antes do colapso total, frequentemente, deformações tendem a se concentrar em regiões ou faixas estreitas, denominadas de bandas de localização. Essa concentração acelera drasticamente a falha estrutural (FLÓREZ-LÓPEZ; MARANTE; PICÓN, 2015).

Um estudo pioneiro no campo da localização foi desenvolvido por Rudnicki e Rice (1975), no qual é descrito matematicamente o comportamento na fronteira da banda de localização e são apresentadas as condições necessárias para ocorrência da localização. Nesse trabalho, a preocupação foi apenas em determinar se ocorre ou não o fenômeno, ou seja, o critério de início. Outros importantes trabalhos se encarregaram de melhorar o modelo proposto por Rudnicki e Rice (1975), e aplicá-lo a diferentes problemas, a exemplo de Storen e Rice (1975); Zhang, Lu e Yu (2003); Marante, Picón e Flórez-López (2004); Marante e Flórez-López (2004) e Hashiguchi e Protasov (2004).

De um modo mais didático do que é apresentado na teoria da localização clássica, para compreender como se dá o processo da localização e como ele leva a soluções com problema de unicidade para um caso unidimensional, conforme abordagem de Flórez-López, Marante e Picón (2015), considere uma barra dividida em dois elementos finitos da mesma seção transversal A e mesmo material, porém com comprimentos diferentes: L_1 e L_2 (Figura 2.12a). A base da estrutura está fixa e a parte superior está submetida a um deslocamento imposto Δ que é uma função linear ao longo do tempo (Figura 2.12b). O comportamento dos elementos é descrito por um modelo simples de dano, semelhante ao apresentado na seção 2.2.1.

$$\begin{aligned}\sigma &= (1 - \omega)E\varepsilon \\ g(\omega) &= |\varepsilon| - R(\omega)\end{aligned}\tag{2.38}$$

Figura 2.12 - Barra dividida em dois elementos sujeitos a um deslocamento imposto (a) e história de deslocamento (b)



Fonte: Flórez-López, Marante, Picón (2015)

A equação de equilíbrio é dada por:

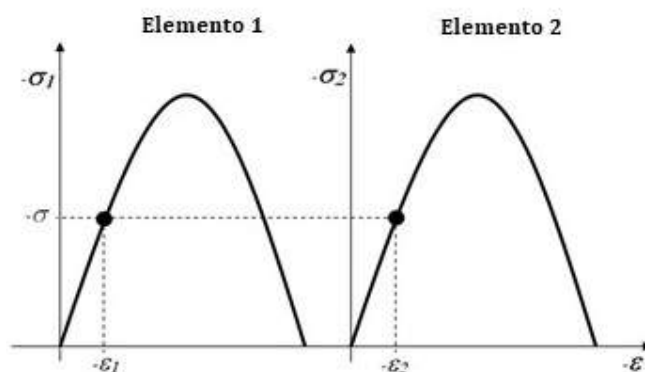
$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{n}{A} \quad (2.39)$$

onde σ_1 e σ_2 são as tensões normais no primeiro e segundo elemento respectivamente e n é a força axial que é constante ao longo da barra. A equação cinemática dos dois elementos é dada por:

$$\varepsilon_1 L_1 + \varepsilon_2 L_2 = \Delta \quad (2.40)$$

onde ε_1 e ε_2 são as deformações no primeiro e segundo elemento respectivamente. As equações de equilíbrio e constitutiva desse problema são apresentadas na Figura 2.13. O equilíbrio é representado pela linha horizontal tracejada e indica tensões iguais em ambos os elementos. Como pode ser observado na Figura 2.13, a lei constitutiva para o caso de uma função linear de resistência ao dano é definida por duas parábolas, uma para cada elemento. Sendo assim, o estado da estrutura em um instante t é representado por dois pontos em ambas as parábolas que recaem sempre sobre o mesmo alinhamento horizontal (FLÓREZ-LÓPEZ; MARANTE; PICÓN, 2015).

Figura 2.13 - Equação constitutiva e de equilíbrio

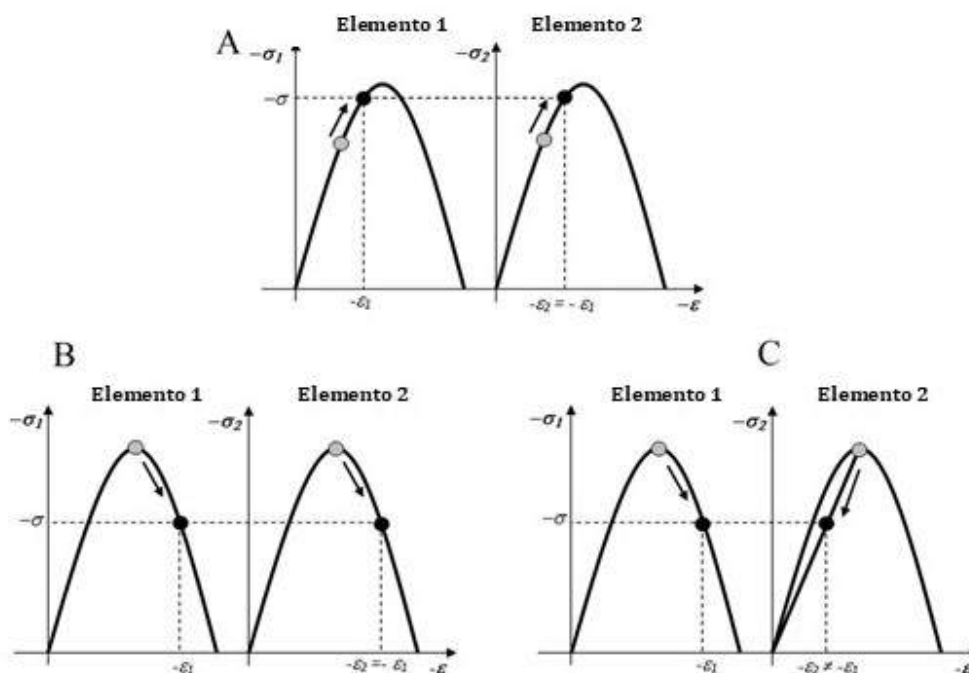


Fonte: Flórez-López, Marante e Picón (2015)

Como explica Flórez-López, Marante e Picón (2015), ao início da análise estrutural, os pontos em ambos os elementos estão na parte esquerda da curva, antes do pico. Ao se aplicar um incremento no deslocamento imposto de modo que a deformação no elemento 1 ainda se mantenha no ramo esquerdo da lei constitutiva (Figura 2.14a), apenas uma solução satisfaz ao mesmo tempo a equação constitutiva do segundo elemento e a equação de equilíbrio. Essa solução única mostra que a deformação é igual em ambos os elementos.

Ainda segundo Flórez-López, Marante e Picón (2015), agora em um passo seguinte da análise, considere que os pontos estão no pico das curvas em ambos os elementos ou na parte à direita do pico (Figura 2.14b e c). Novamente, aplica-se um incremento no deslocamento imposto de modo que seja gerado um incremento de deformação no primeiro elemento. Como a estrutura está entrando na fase de amolecimento, para ambos os elementos, deve ocorrer uma redução na tensão, no entanto, com isso, existem duas possibilidades para atender a equação de equilíbrio. Na primeira, o estado em ambos os elementos segue a curva constitutiva de carregamento com incremento de dano de modo que deformação e dano em ambos os elementos ainda são os mesmos. Essa solução é chamada de homogênea. Na segunda possibilidade, diferentemente do ponto no elemento 1, o ponto do segundo elemento segue um caminho de descarregamento elástico. Nesse caso ocorre uma redução da deformação no segundo elemento mesmo que o deslocamento total da barra aumente. Essa solução é chamada de localizada já que deformação e dano tendem a se concentrar apenas em uma parte da barra (nesse exemplo, no elemento 1), enquanto ocorre um descarregamento elástico no restante da fração da barra (nesse exemplo, no elemento 2).

Figura 2.14 - Solução única antes do pico (a), solução homogênea pós-pico (b) e solução localizada pós-pico (c)



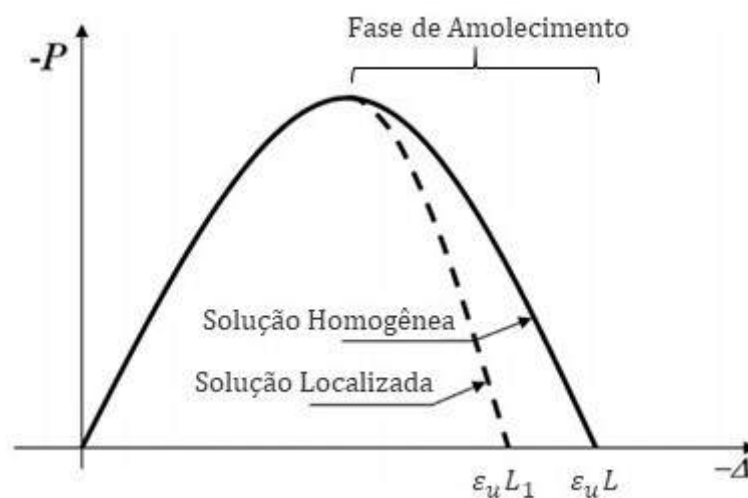
Fonte: Flórez-López, Marante, Picón (2015)

A curva de força P vs. deslocamento Δ , para ambas as soluções são apresentadas na Figura 2.15. Até antes do pico, ou seja, antes do início da fase de amolecimento, as soluções coincidem já que como foi visto, apenas uma solução satisfaz o problema. Após essa fase, surgem as duas soluções possíveis. Na solução homogênea, o deslocamento tende a um valor máximo dependente do comprimento L total enquanto na solução localizada, o deslocamento depende do comprimento do elemento 1 (L_1), já que é nele que se concentram os efeitos de deformação. O elemento 2 sofre uma descarga elástica e acaba a análise com deformação zero e, portanto, não influencia na solução final. Como os comprimentos dos elementos finitos são arbitrários, a barra pode ser dividida em dois elementos de qualquer comprimento desde que o resultado da soma seja igual a L . Com isso, para cada valor de L_1 escolhido, uma diferente solução final localizada é obtida, ou seja, o problema apresenta um infinito número de soluções dependentes da malha utilizada.

De acordo com Flórez-López, Marante e Picón (2015), experimentalmente e portanto, na prática, a solução que efetivamente é observada na natureza é sempre a localizada, sendo que o comprimento L_1 depende do material e é chamado de espessura da banda de localização. Ou seja, a solução homogênea é fisicamente impossível.

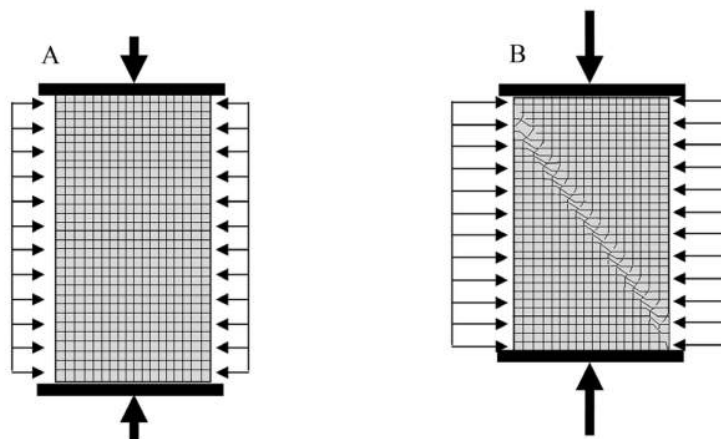
O fenômeno da localização aparece não só em problemas uniaxiais como também em qualquer tipo de estrutura. É a partir desse fenômeno que se inicia uma superfície de ruptura do material. Por exemplo, a Figura 2.16 mostra o surgimento da banda de localização em um corpo de prova de areia submetido a um estado de deformações planas. Inicialmente no primeiro estado, o corpo de prova apresenta distribuição de deformações uniforme. No segundo momento, pode-se observar a formação da banda de localização e o campo de deformações deixa de ser uniforme sendo que nos limites da banda pode-se observar a descontinuidade.

Figura 2.15 - Curvas de força vs. deslocamento



Fonte: Flórez-López, Marante e Picón (2015)

Figura 2.16 - Representação esquemática de um teste triaxial: antes da localização (A) e depois da localização (B)



Fonte: Flórez-López, Marante, Picón (2015)

Em um caso bidimensional qualquer, inicialmente e até um certo ponto de solicitação, o campo de tensões e o campo de deformações são uniformes, bem como a distribuição de dano no espécime. A partir de determinado momento, entra em ação o fenômeno da localização descrito para o caso uniaxial, de modo que o campo de deformações deixa de ser uniforme, apresentando uma estreita faixa com deformações intensas, a banda de localização.

Segundo Marante, Benallal e Flórez-López (2007), no caso unidimensional, a localização só é possível quando a deformação corresponde ao máximo da curva tensão vs. deformação. No entanto, para o caso geral tridimensional, o “máximo” pode ser definido de várias maneiras e sendo assim deve-se saber definir o qual corresponde a formação da descontinuidade. O critério para isso é chamado de critério de localização e é obtido ao analisar o problema segundo uma abordagem em velocidades. Em todo caso, as soluções localizadas são descontínuas, surgem apenas na fase de amolecimento e aceleram bastante o processo de ruptura das estruturas, sendo, portanto, imprescindível a identificação do correto critério de início.

Portanto, o termo localização pode se referir a uma condição matemática relacionada a modelos de dano ou a um fenômeno físico. No caso matemático, se refere ao surgimento de um infinito número de soluções para o problema e no caso físico, se refere ao aparecimento de uma faixa onde deformação e dano são concentrados enquanto o restante do sólido tenta a descarregar elasticamente. Quando modelos da mecânica do dano são usados para prever colapso estrutural, é, portanto, necessário escolher algum critério de regularização que permita selecionar a solução correta do ponto de vista físico. Modelos mais recentes de dano propõem processos de regularização para problema, no que pode ser chamado de mecânica do dano moderna. Paralelamente, com uma formulação mais simples, uma nova abordagem que lida com essa questão é dada pela mecânica do dano concentrado, que no caso de pórticos, por exemplo, concentra os efeitos inelásticos em rótulas inelásticas para regularizar problemas de dano (FLÓREZ-LÓPEZ; MARANTE; PICÓN, 2015).

2.4. MECÂNICA DO DANO MODERNA

Diante do problema relacionado ao fenômeno da localização, após o qual ocorre uma dependência da solução em relação a malha de elementos finitos, os modelos clássicos da mecânica do dano falham na descrição do comportamento estrutural na chamada fase de amolecimento. A análise por elementos finitos não é admissível nesses casos já que gera infinitas soluções. Como foi visto, a mecânica do dano é uma poderosa ferramenta na descrição

de fenômenos inelásticos nas estruturas, mas só funciona antes do processo de localização, sendo esse um dos seus principais entraves como teoria geral. Em busca de meios para contornar esse problema, modelos modernos de dano foram elaborados formando o que pode ser chamado de mecânica do dano moderna. As duas principais técnicas de regularização adotadas nesses modelos são a abordagem não local e a abordagem de gradiente.

Nos modelos de dano local, a exemplo dos modelos de dano clássico, o dano só depende do que acontece no EDS em que surgiu o defeito ou dano. Nesses modelos, essa inserção local do dano gera a fronteira de descontinuidade na ocorrência do fenômeno da localização. Já nos modelos em dano não local, segundo Peerlings et al. (1996), o dano depende das deformações não só próprio ponto de origem (EDS para o caso tridimensional), mas também do volume dos arredores (EDS vizinhos). O objetivo desses modelos não locais é evitar a descontinuidade impondo um campo de dano contínuo, que é feito por meio de funções peso encarregadas da distribuição do dano ao longo dos outros elementos.

A outra abordagem, que utiliza dano com gradiente, é, por definição, também um modelo não local. No entanto, nesse caso, o dano depende das deformações no próprio EDS de origem e também das derivadas segunda do campo de deformações em relação a x e y , de modo que também são impostos campos contínuos. Em ambos os casos, é introduzida uma modificação nas leis constitutivas de modo que o modelo reproduza o campo de deformações não uniforme.

A abordagem não local, apesar de contornar o problema, desrespeita um dos princípios fundamentais da mecânica dos sólidos conhecido como princípio da localidade o qual prediz que as tensões atuantes em um ponto de um sólido deformável dependem apenas do movimento relativo da sua vizinhança (PIMENTA, 2006). Portanto, as modificações implementadas nos modelos não locais não objetivam uma melhor representação do problema físico e sim apenas uma forma de gerar resultados numericamente objetivos.

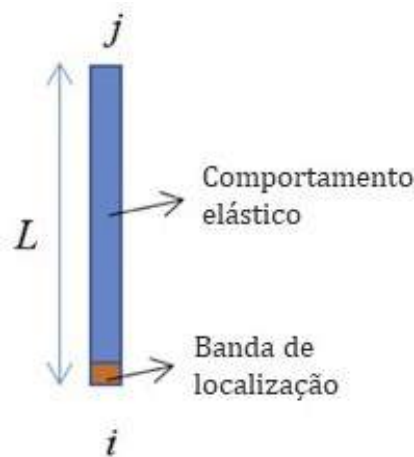
2.5. MECÂNICA DO DANO CONCENTRADO (MDC)

Nos modelos de dano concentrado, de acordo com Flórez-López, Marante e Picón (2015), assume-se que a banda de localização possui uma espessura tão pequena se comparada ao comprimento do elemento, que pode-se considerar o dano atuando de forma concentrada em uma zona de comprimento zero. No caso de elementos de pórtico, o dano está concentrado em rótulas inelásticas. Essa hipótese é o critério de regularização usado para dar unicidade de solução ao problema localizado no caso de modelos de dano para pórtico.

Por uma questão de simplicidade ao entendimento inicial, o procedimento adotado nos modelos da MDC é apresentado primeiro para o caso uniaxial de uma barra sob tração. No processo é demonstrada a independência de malha característica do modelo. Posteriormente é apresentado o modelo para chapas, alvo deste trabalho.

Conforme Amorim et al. (2018), considere novamente o problema uniaxial apresentado na seção 2.2.1, ilustrado na Figura 2.9a. Dessa vez, no entanto, será adotado um novo elemento finito de dois nós, no qual o dano está totalmente concentrado em uma banda de localização enquanto o restante do elemento permanece elástico (Figura 2.17). A banda tem uma espessura inicial nula que será incrementada com o decorrer da análise, essa ideia é similar ao conceito de rótula inelástica ou da ZPF na mecânica da fratura.

Figura 2.17 – Elemento finito do dano concentrado para uma barra uniaxial



Fonte: Amorim et al. (2018)

A matriz de deslocamentos nodais do elemento é dada por:

$$\{q\} = \{u_i \quad u_j\}^T \quad (2.41)$$

Nesse modelo, de acordo com Amorim (2016), o alongamento δ do elemento é usado como variável cinemática ao invés da deformação ε . A equação cinemática relacionando deslocamentos e deformações é:

$$\delta = [B^0]\{q\}; \quad [B^0] = [-1 \quad 1] \quad (2.42)$$

A matriz de forças nodais $\{Q\}$ do elemento é:

$$\{Q\} = A[B^0]^T \sigma \quad (2.43)$$

onde σ é a tensão convencional de Cauchy.

Introduzindo agora a hipótese de equivalência em alongamento ao invés de em deformação, tem-se:

$$\delta = \delta^e + \delta^d; \quad \delta^e = \frac{L}{E} \sigma \quad (2.44)$$

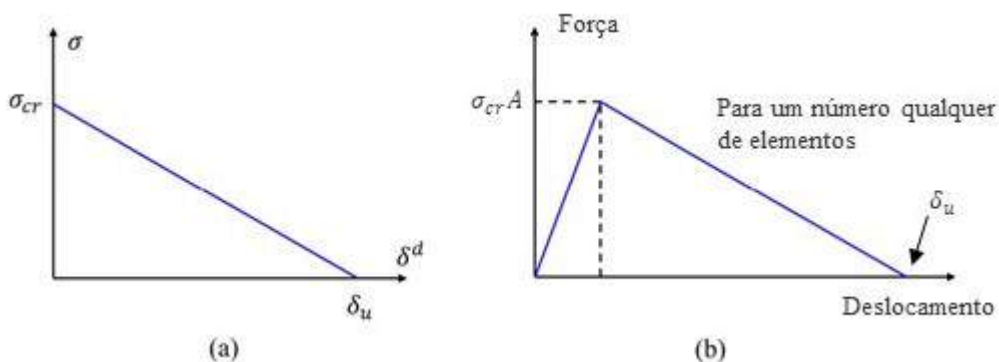
onde δ é o alongamento total do elemento, δ^e é o alongamento da parte elástica e δ^d representa a medida do alongamento da banda de localização, relacionada ao dano. Considerando o caso particular de deslocamentos positivos e monotônicos, uma função de dano semelhante à da Equação (2.35) foi escolhida, mas nesse caso usando termos de alongamento de dano no lugar da deformação de dano:

$$g = \sigma - \sigma_{cr} \left(1 - \frac{\delta^d}{\delta_u} \right) \leq 0 \quad (2.45)$$

onde σ_{cr} e δ_u são parâmetros do material descritos no gráfico da Figura 2.18a. Note que a Equação (2.45) é comparável com a lei de tração-amolecimento na ZPF da mecânica da fratura, com o alongamento relacionado ao dano δ^d fazendo o papel do deslocamento de abertura de fissura. Esse elemento finito gera curvas de força vs. deslocamento que são independentes de malha (Figura 2.18b) (AMORIM *et al.*, 2018).

Vale lembrar que esse modelo não considera deformações plásticas nem a presença de dano distribuído no elemento. Trata-se de um modelo que representa um estado elástico ou com presença de dano concentrado, de forma a demonstrar a aplicação e eficácia para modelagem da fase de amolecimento com a presença do fenômeno da localização.

Figura 2.18 - Resposta inelástica do material (a) e solução numérica para uma barra simples sob tração (b)



Fonte: Amorim (2016)

Conforme explica Amorim et al. (2018), é simples entender porque esse novo elemento leva a resultados únicos enquanto o da mecânica do dano clássico não, a chave do problema é a escolha da variável cinemática (deformação ou alongamento). No modelo de dano clássico, a tensão é zero quando o dano é igual a um, logo, a deformação elástica também é zero e apenas a deformação relacionada ao dano pode ser não nula. De acordo com a lei de dano, para σ igual a zero, a deformação relacionada ao dano ε^d é igual a deformação última ε_u . Portanto, o deslocamento último é igual a deformação última multiplicada pelo comprimento do elemento finito. Consequentemente, a curva de força vs. deslocamento é dependente de malha já que a escolha do comprimento do elemento ou da quantidade de elementos é arbitrária e com infinitas possibilidades. Por outro lado, no modelo de dano concentrado, o alongamento da banda de localização é igual ao alongamento último δ_u quando o dano atinge o valor de um e a tensão é igual a zero. O restante da barra se encontra indeformada e, portanto, o deslocamento último não depende do comprimento do elemento de modo que a curva resultante é independente de malha. Nas simulações, um defeito foi introduzido no primeiro elemento de todas as malhas no intuito de impor a localização do dano sempre na mesma região para efeito comparativo. Esse aspecto pode ser comparado com a introdução de uma fissura inicial nos problemas de mecânica da fratura.

2.6. MECÂNICA DO DANO CONCENTRADO EXPANDIDA (MDCX)

A teoria vista anteriormente para problemas uniaxiais pode ser expandida para meios contínuos bidimensionais carregados no seu plano médio. Para isso, é necessário o uso de

elementos finitos de chapa. Primeiramente é apresentada uma revisão do elemento elástico clássico de quatro lados e quatro nós que sofrerá modificações a fim de servir de base para a formulação e apresentação do elemento da mecânica do dano concentrado expandida (MDCX).

2.6.1. O Elemento Quadrilateral Elástico de Quatro Nós

O elemento clássico de quatro nós para um meio contínuo bidimensional (Figura 2.19a) é definido pelas seguintes expressões de deformações $\{\varepsilon\}$, tensões $\{\sigma\}$, forças nodais externas $\{Q\}$ e matriz de rigidez $[K]$ em função dos deslocamentos nodais $\{q\}$:

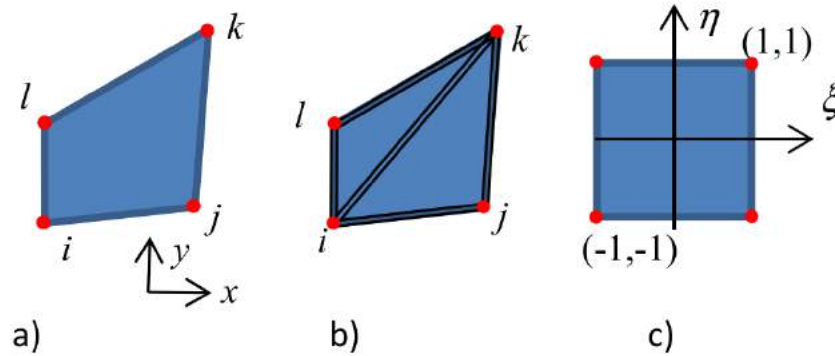
$$\begin{aligned}\{\varepsilon(x, y)\} &= [B(x, y)]\{q\}; \quad \{\sigma(x, y)\} = [H]\{\varepsilon(x, y)\} = [H][B(x, y)]\{q\} \\ \{Q\} &= \iiint [B(x, y)]^T \{\sigma(x, y)\} dV \\ [K] &= \iiint [B(x, y)]^T [H] [B(x, y)] dV\end{aligned}\tag{2.46}$$

onde $[B(x, y)]$ é a matriz cinemática convencional em coordenadas cartesianas e $[H]$ representa a matriz de coeficientes elásticos. Ambas as matrizes podem ser encontradas no Apêndice A. O vetor de deslocamentos nodais é dado por $\{q\}^T = \{u_i, v_i, u_j, v_j, u_k, v_k, u_l, v_l\}$, o vetor de tensões é dado por $\{\sigma\}^T = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}$ e o vetor de forças nodais externas é dado por $\{Q\}^T = \{Fx_i, Fy_i, Fx_j, Fy_j, Fx_k, Fy_k, Fx_l, Fy_l\}$.

Segundo Amorim et al. (2018), o mesmo elemento pode ser reescrito usando uma notação que permitirá de forma simples a formulação de um elemento bidimensional da mecânica do dano concentrado. Para isso, uma treliça equivalente de 5 barras ou extensômetros numéricos (*numexes*) é introduzida no elemento, conectando os nós como mostrado na Figura 2.19b.

Os alongamentos dos *numexes* (nova variável cinemática do modelo) são computados na matriz de deformações generalizadas $\{\delta\}^T = [\delta_{ij}, \delta_{ik}, \delta_{il}, \delta_{jk}, \delta_{kl}]$, onde δ_{ij} representa o alongamento do *numex* entre os nós i e j e assim em diante.

Figura 2.19 - Elemento clássico de quatro nós (a), extensômetros numéricos ou *numexes* (b) e espaço de referência (c)



Fonte: Amorim et al. (2018)

A equação cinemática entre os deslocamentos nodais e as deformações generalizadas por ser escrita como:

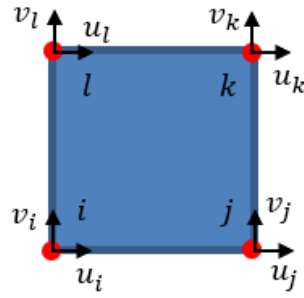
$$\{\delta\} = [b]\{q\}$$

$$[b] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 & 0 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

onde $[b]$, chamada de matriz de transformação cinemática, está expressa no espaço usual de referência de coordenadas ξ e η (Figura 2.19c). A matriz $[b]$ em coordenadas cartesianas pode ser encontrada no Apêndice A.

O tensor de deformação em qualquer ponto do elemento bidimensional convencional depende de cinco constantes independentes. Para dedução, tome um elemento com quatro nós (i , j , k e l), cada um com dois graus de liberdade (u e v), sendo respectivamente os deslocamentos na direção x e y (Figura 2.20).

Figura 2.20 - Graus de liberdade do elemento



Fonte: O autor

O elemento tem, portanto, oito graus de liberdade ($u_i, v_i, u_j, v_j, u_k, v_k, u_l, v_l$). A aproximação dos deslocamentos é dada por:

$$\begin{aligned} u &\cong a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy \\ v &\cong b_0 + b_1x + b_2y + b_3xy \end{aligned} \quad (2.48)$$

Sendo assim, as deformações são expressas por:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = a_1 + a_3y \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = b_2 + b_3x \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = a_2 + a_3x + b_1 + b_3y = c + a_3x + b_3y \end{aligned} \quad (2.49)$$

De modo que surgem cinco constantes independentes para compor o campo de deformações (a_1, a_3, b_2, b_3 e c). Por essa razão são necessários e suficientes a presença de também cinco *numexes* $\{\delta\}$ no modelo

Com isso, conforme Amorim et al. (2018), pode-se mostrar que é possível expressar o tensor de deformação em função dos cinco numexes de acordo a equação:

$$\{\epsilon\} = [T]\{\delta\} \quad (2.50)$$

e

$$[B] = [T][b] \quad (2.51)$$

onde $[T]$ é a matriz de transformação dos *numexes*, que expressa no espaço de referência usual de coordenadas ξ e η é dada por:

$$[T] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 - \xi & 0 & 0 & 0 & 1 + \xi \\ 0 & 0 & 1 - \eta & 1 + \eta & 0 \\ -(1 + \eta) & 2\sqrt{2} & -(1 + \xi) & \xi - 1 & \eta - 1 \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

e $[B]$ é a matriz cinemática convencional. As matrizes $[T]$ e $[B]$ em coordenadas cartesianas podem ser encontradas no Apêndice A.

Note que qualquer combinação de cinco *numexes* seria suficiente para definir o estado de deformação do elemento. Por exemplo, a diagonal $j - l$ poderia ter sido escolhida ao invés da $i - k$, ou em substituição a qualquer das outras barras. Conforme Amorim et al. (2018), tensões, forças internas e matriz de rigidez são agora dadas pelas seguintes expressões em função dos alongamentos dos *numexes* ao invés das deformações:

$$\begin{aligned} \{\sigma(x, y)\} &= [H][T(x, y)]\{\delta\} \\ \{Q\} &= \iiint [B(x, y)]^T \{\sigma(x, y)\} dV = [b]^T \iiint [T(x, y)]^T \{\sigma(x, y)\} dV \\ [K] &= [b]^T \left(\iiint [T(x, y)]^T [H][T(x, y)] dV \right) [b] \end{aligned} \quad (2.53)$$

Os elementos finitos (2.46) e (2.53) são idênticos. A alteração na formulação é notável por sua simplicidade e visa permitir a inclusão das variáveis internas da mecânica do dano concentrado para o caso bidimensional de modo análogo ao apresentado para o problema uniaxial.

2.6.2. O Elemento Quadrilateral de Quatro Nós da MDC

Amorim et al. (2018) propõe um elemento finito para análises planas que é o resultado do elemento quadrilateral elástico modificado na seção 2.6.1 com adição de quatro bandas de localização fixas nos lados do elemento (Figura 2.21a). Dada a natureza das funções de forma do elemento, com nós presentes apenas nos vértices, é assumida uma variação linear na espessura da banda entre seus respectivos nós (Figura 2.21b). Quando uma banda de localização cruza qualquer um dos *numexes*, são gerados alongamentos adicionais relacionados ao dano localizado $\{\delta^d\}^T = \{\delta_{ij}^d, \delta_{ik}^d, \delta_{il}^d, \delta_{jk}^d, \delta_{kl}^d\}$, que podem ser expressos em função da espessura das

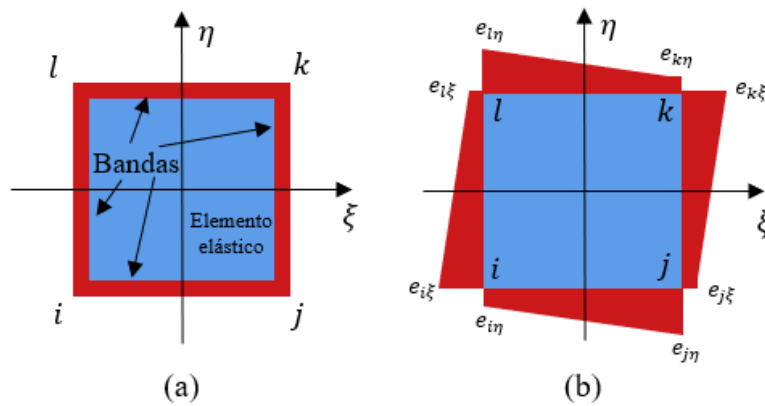
bandas. Essas espessuras são as novas variáveis internadas do modelo que está baseado em solicitação de modo I (Figura 2.5). É importante frisar também que a malha composta por esse elemento é sempre formada por retângulos, sendo essa uma limitação desse modelo.

No espaço de referência, os alongamentos relacionados ao dano têm as seguintes expressões:

$$\{\delta^d\} = \begin{bmatrix} 0 \\ e_{i\eta}\sqrt{2}/2 \\ e_{i\eta} \\ e_{j\eta} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{i\xi} \\ e_{k\xi}\sqrt{2}/2 \\ 0 \\ 0 \\ e_{k\xi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ e_{k\eta}\sqrt{2}/2 \\ e_{l\eta} \\ e_{k\eta} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{i\xi} \\ e_{i\xi}\sqrt{2}/2 \\ 0 \\ 0 \\ e_{l\xi} \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

onde $e_{i\eta}$ é a espessura da banda no nó i no lado ij , $e_{j\xi}$ no nó j no lado jk e assim por diante (Figura 2.21b). O vetor $\{\delta^d\}$ em coordenadas cartesianas pode ser encontrada no Apêndice A.

Figura 2.21 - Bandas de localização em um elemento de quatro nós (a) e espessuras das bandas (b)



Fonte: modificado de Amorim et al. (2018)

A hipótese de equivalência em deformação, entendida agora e termo de deformações generalizadas ou alongamentos, estabelece que os alongamentos totais dos *numexes* são iguais aos alongamentos do elemento elástico mais aqueles devido às bandas de localização. Logo, a lei elástica é dada por:

$$\begin{aligned} \{\delta\} &= \{\delta^e\} + \{\delta^d\} \\ \{\sigma\} &= [H][T]\{\delta - \delta^d\} \end{aligned} \quad (2.55)$$

As equações constitutivas são completadas com oito funções de dano, uma para cada espessura de banda em cada nó do elemento. Por exemplo, usando expressões similares a (2.45) e no espaço de referência, tem-se:

$$\begin{aligned}
 g_{i\xi} &= \sigma_{i\xi} - \sigma_{cr} \left(1 - \frac{e_{i\xi}}{\delta_u}\right) \leq 0 ; g_{i\eta} = \sigma_{i\eta} - \sigma_{cr} \left(1 - \frac{e_{i\eta}}{\delta_u}\right) \leq 0 \\
 g_{j\xi} &= \sigma_{j\xi} - \sigma_{cr} \left(1 - \frac{e_{j\xi}}{\delta_u}\right) \leq 0 ; g_{j\eta} = \sigma_{j\eta} - \sigma_{cr} \left(1 - \frac{e_{j\eta}}{\delta_u}\right) \leq 0 \\
 g_{k\xi} &= \sigma_{k\xi} - \sigma_{cr} \left(1 - \frac{e_{k\xi}}{\delta_u}\right) \leq 0 ; g_{k\eta} = \sigma_{k\eta} - \sigma_{cr} \left(1 - \frac{e_{k\eta}}{\delta_u}\right) \leq 0 \\
 g_{l\xi} &= \sigma_{l\xi} - \sigma_{cr} \left(1 - \frac{e_{l\xi}}{\delta_u}\right) \leq 0 ; g_{l\eta} = \sigma_{l\eta} - \sigma_{cr} \left(1 - \frac{e_{l\eta}}{\delta_u}\right) \leq 0
 \end{aligned} \tag{2.56}$$

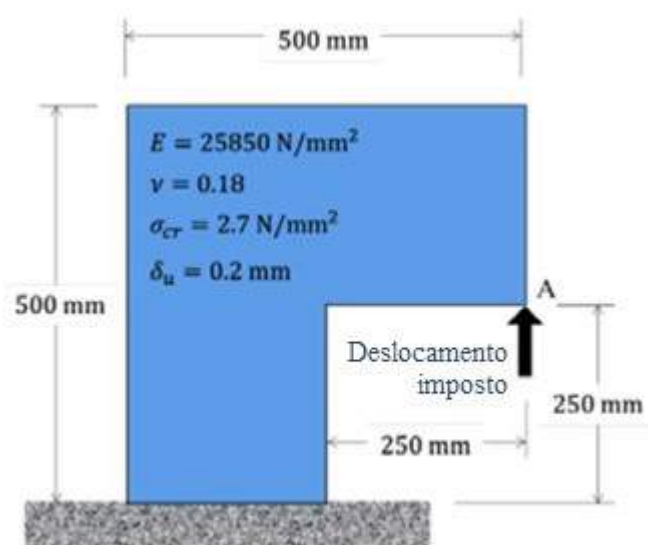
onde $\sigma_{i\xi}$ e $\sigma_{i\eta}$ representam, respectivamente, a tensão no nó i na direção dos eixos ξ e η .

Finalmente, as mesmas equações cinemática e de equilíbrio da seção anterior podem ser usadas:

$$\begin{aligned}
 \{\delta\} &= [b]\{q\} \\
 \{Q\} &= [b]^T \iiint [T]^T \{\sigma\} dV
 \end{aligned} \tag{2.57}$$

Ainda conforme trabalho de Amorim et al. (2018), o elemento finito proposto foi implementado em um programa de análise estrutural acadêmico, desenvolvido originalmente por Uzcategui (2012). O exemplo apresentado na Figura 2.22 é usado para mostrar a convergência da solução numérica com relação ao tamanho do elemento, ou seja, a objetividade do modelo. A chapa sólida em formato de “L” está fixada na base e submetida a um deslocamento monotônico crescente imposto no canto direito inferior, designado como ponto A. A análise foi encerrada quando o alongamento último da banda de localização foi atingido no canto interior do sólido. As propriedades do material e as dimensões do sólido estão indicadas na Figura 2.22.

Figura 2.22 - Chapa sólida em formato de "L", geometria, propriedades do material e condições de contorno



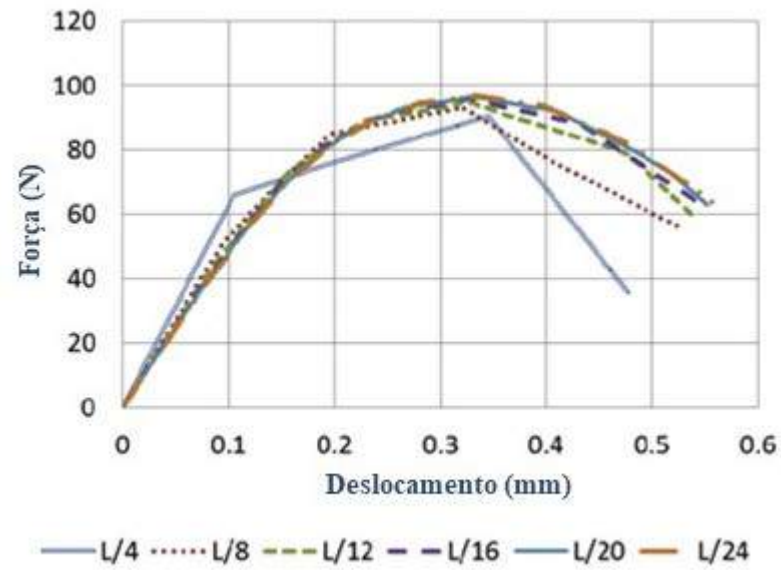
Fonte: Amorim et al. (2018)

Seis malhas regulares foram usadas para análise, identificadas como L/4, L/8, L/12, L/16, L/20 e L/24, sendo L a máxima dimensão do espécime, no exemplo, 500 mm. Tais malhas apresentam 12, 48, 108, 192, 300 e 432 elementos respectivamente. Como foi dito, o modelo implementado não permite elementos irregulares.

A Figura 2.23 mostra as curvas de força vs. deslocamento no ponto A, considerando cada malha de forma que é possível observar claramente a convergência da análise desse exemplo à medida que se aumenta o número de elementos. À medida que malhas mais finas são usadas, o modelo numérico tende a alcançar uma solução única, fato esse que condiz com o esperado para uma análise por elementos finitos, demonstrando assim a independência de malha do modelo.

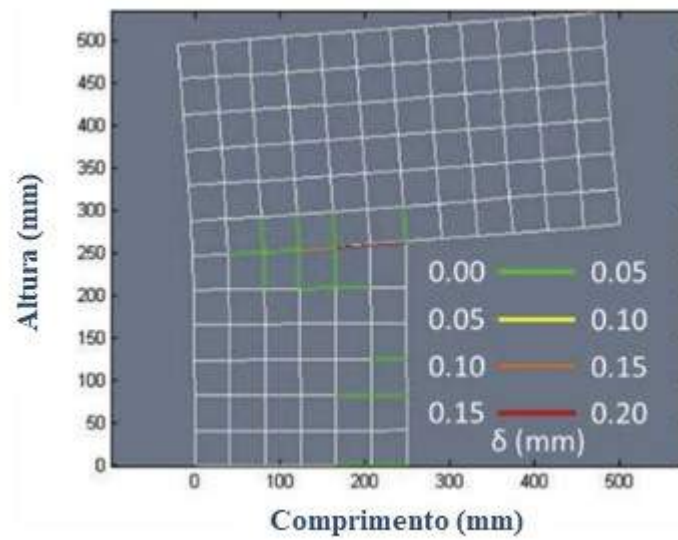
Finalmente, as Figura 2.24 e Figura 2.25 mostram a configuração final para as malhas L/12 e L/24 respectivamente onde a escala de cores representa a espessura das bandas em mm. A deformada da estrutura é dada pela deformação dos elementos atrelada a formação de bandas com suas respectivas espessuras. Note que a banda principal, que levará à ruptura final da estrutura, se inicia no canto interno do sólido, sendo condizente com a esperada região de falha para uma estrutura real com as dadas condições de contorno. Ramificações secundárias com pequenas espessuras aparecem no final da banda principal e no lado inferior direito do sólido, sendo desprezáveis para o colapso da estrutura.

Figura 2.23 - Força vs. deslocamento para diversas malhas



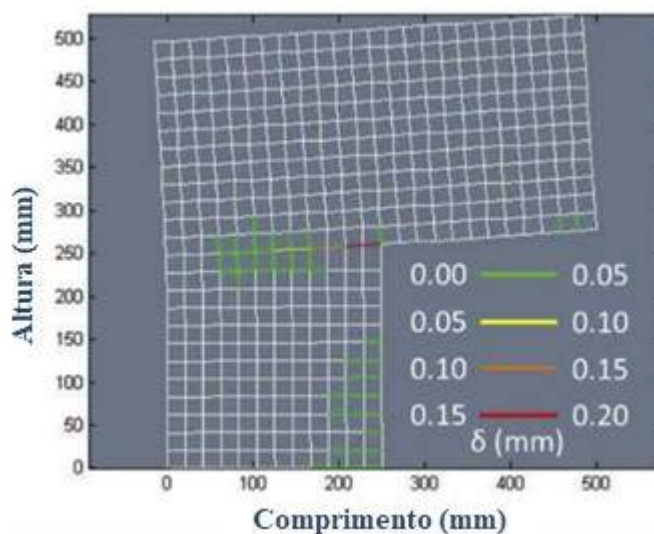
Fonte: Amorim et al. (2018)

Figura 2.24 - Configuração deformada e bandas de localização para a malha L/12



Fonte: Amorim et al. (2018)

Figura 2.25 - Configuração deformada e bandas de localização para a malha L/24



Fonte: Amorim et al. (2018)

Como é discutido por Amorim et al. (2018), uma grande vantagem da formulação proposta é que não é necessário definir previamente o ponto ou região onde a estrutura está mais sujeita a ocorrência das bandas de localização e consequentemente de falha estrutural, o próprio modelo consegue identificar a zona de concentração de esforços. Essa é possivelmente uma das principais características do método quando se leva em conta que em problemas complexos é difícil apontar a posição onde surgirão as bandas de localização.

3. METODOLOGIA

3.1. ELEMENTO FINITO PROPOSTO: MODO I

O exemplo apresentado na seção 2.6.2 mostra que a mecânica do dano concentrado expandida leva a análises por elementos finitos independentes de malha, ou seja, o modelo apresenta objetividade. Apesar de ser um exemplo simples, os resultados mostram grande potencial e já provam a viabilidade da abordagem, justificando esforços adicionais nessa direção.

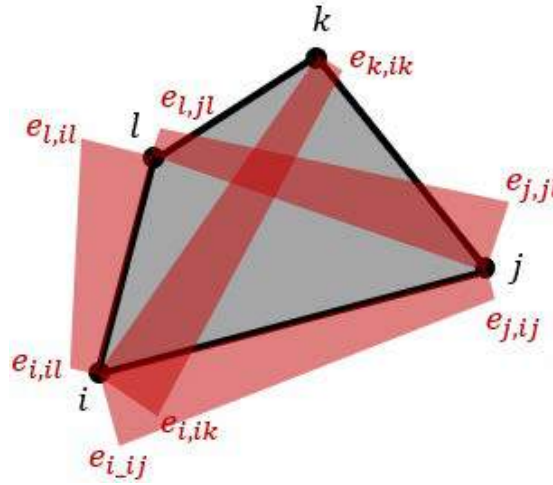
Como é apontado no próprio trabalho de Amorim (2016), o elemento se torna ineficiente em alguns casos em que a banda de localização tende a cruzar diagonalmente o interior do elemento. Nesses casos, já que as bandas estão fixas nos lados do elemento, para representar um caminho real de crescimento da região de localização, a implementação numérica requer malhas bastante refinadas. Além disso, segundo Amorim et al. (2018), apesar do modelo ser construído usando uma malha regular, a formulação em si não restringe a possibilidade de implementação de malhas irregulares.

Levando isso em consideração, foi elaborado um elemento finito de quatro nós e quatro bandas (com previsão de bandas diagonais) que permite malhas irregulares. O intuito dessas modificações é melhorar a resposta do modelo para variados problemas, com um processo de convergência mais eficiente. O trabalho de programação do novo elemento finito e implementação do mesmo em um programa de análise pelo MEF foi supervisionado pelo Prof. Dr. Ricardo Picón, o qual contribuiu de forma essencial para o desenvolvimento deste trabalho.

Portanto, o elemento proposto neste trabalho apresenta quatro bandas: duas diagonais no interior do elemento e outras duas fixas nas laterais, em arestas que partilham do mesmo nó, conforme mostra a Figura 3.1. Foi mantido o número de bandas (quatro bandas), retirando-se duas das laterais e incluindo as duas diagonais. Isso se deu por conta da hipótese de que a inclusão de mais bandas poderia gerar problemas numéricos e, além disso, a ideia é que a falta de bandas previstas em um lado do elemento seja compensada pela banda presente no elemento vizinho, de forma que exista a previsão de bandas em todas as partes da malha.

Além disso, o elemento permite a criação de malhas irregulares, ou seja, a geometria do elemento não está presa ao formato regular como era no elemento proposto inicialmente por Amorim (2016). Quanto ao tipo de solicitação das bandas, o modelo proposto está formulado em modo I.

Figura 3.1 - Novo elemento proposto



Fonte: O autor

A formulação do novo elemento, apresenta o mesmo esquema descrito na seção 2.6.2 com alteração apenas no vetor dos alongamentos relacionados ao dano $\{\delta_d\}$ e das leis de evolução do dano que apesar de também serem oito, interligam nós diferentes do elementos com a presença agora das bandas diagonais.

O vetor $\{\delta^d\}$, para o novo elemento proposto, em coordenadas cartesianas, pode ser encontrado no Apêndice B. As novas leis de evolução são dadas por:

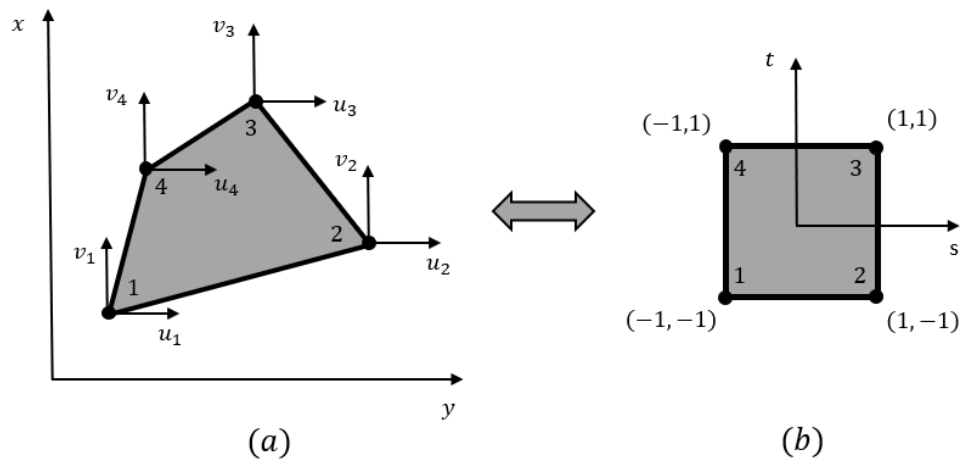
$$\begin{aligned}
 g_{i,ij} &= \sigma_{n_{i,ij}} - \sigma_{cr_{i,ij}} \left(1 - \frac{e_{i,ij}}{\delta_{u_{i,ij}}} \right) \leq 0 ; g_{j,ij} = \sigma_{n_{j,ij}} - \sigma_{cr_{j,ij}} \left(1 - \frac{e_{j,ij}}{\delta_{u_{j,ij}}} \right) \leq 0 \\
 g_{i,il} &= \sigma_{n_{i,il}} - \sigma_{cr_{i,il}} \left(1 - \frac{e_{i,il}}{\delta_{u_{i,il}}} \right) \leq 0 ; g_{l,il} = \sigma_{n_{l,il}} - \sigma_{cr_{l,il}} \left(1 - \frac{e_{l,il}}{\delta_{u_{l,il}}} \right) \leq 0 \\
 g_{i,ik} &= \sigma_{n_{i,ik}} - \sigma_{cr_{i,ik}} \left(1 - \frac{e_{i,ik}}{\delta_{u_{i,ik}}} \right) \leq 0 ; g_{k,ik} = \sigma_{n_{k,ik}} - \sigma_{cr_{k,ik}} \left(1 - \frac{e_{k,ik}}{\delta_{u_{k,ik}}} \right) \leq 0 \\
 g_{j,jl} &= \sigma_{n_{j,jl}} - \sigma_{cr_{j,jl}} \left(1 - \frac{e_{j,jl}}{\delta_{u_{j,jl}}} \right) \leq 0 ; g_{l,jl} = \sigma_{n_{l,jl}} - \sigma_{cr_{l,jl}} \left(1 - \frac{e_{l,jl}}{\delta_{u_{l,jl}}} \right) \leq 0
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

A formulação completa está ilustrada no esquema da Figura 3.3, onde estão destacadas as equações pertencentes ao problema local e global.

Um outro ponto importante na implementação do novo elemento proposto é a necessidade do chamado mapeamento isoparamétrico do elemento. Devido a possibilidade de malhas com elementos irregulares, torna-se muito complicado escrever as funções de forma em

coordenadas cartesianas (x, y) dada a grande variação de forma dos elementos da malha (Figura 3.2a). Uma solução simples para o problema é expressar as funções de forma com base em um elemento genérico com coordenadas locais de referência (Figura 3.2b), o que resulta em equações mais simples. No entanto, para cálculo dos elementos, e, portanto, da estrutura, é necessário derivar as funções de forma em relação às coordenadas globais e para isso é necessária uma transformação de unidades em forma matricial que é feita por meio da chamada matriz jacobiana. O procedimento de mapeamento, portanto, relaciona o elemento da malha com o elemento padrão de referência. Essa transformação é muito importante para possibilitar o cálculo das integrações numéricas que são feitas com base na quadratura de Gauss.

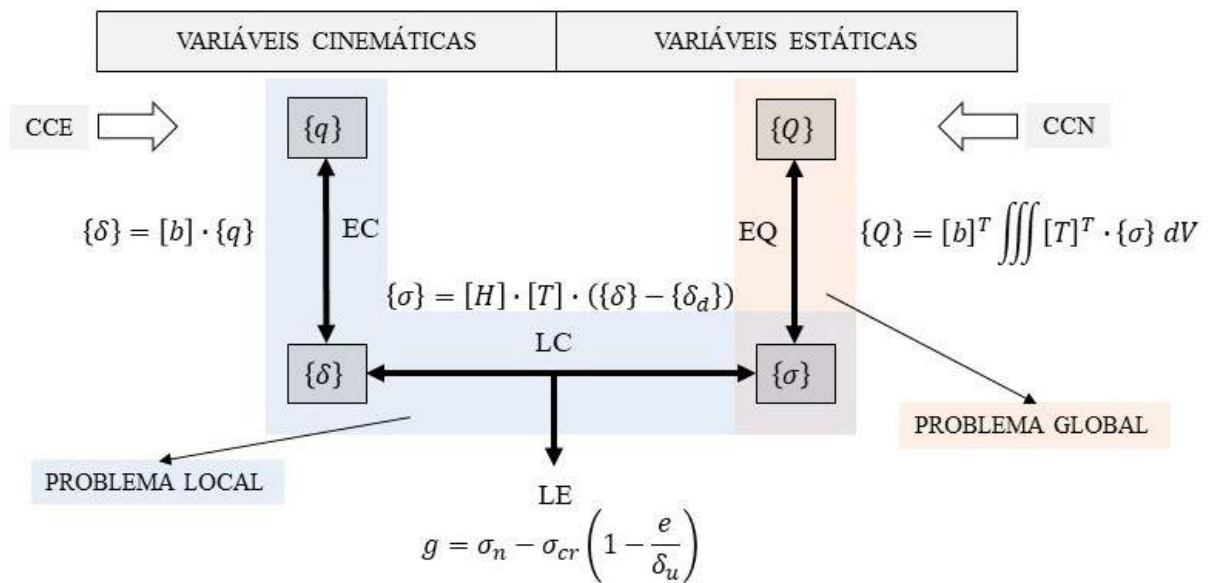
Figura 3.2 - Elemento atual (a) e elemento padrão (b)



Fonte: O autor

O elemento base desse trabalho é chamado de isoparamétrico pois é adotado o mesmo método de interpolação para os deslocamentos e para a geometria.

Figura 3.3 - Esquema geral do modelo MDCX



Fonte: O autor

3.2. IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

O elemento proposto foi implementado em um programa de análise estrutural por elementos finitos. O programa permite a inserção de diferentes tipos de elementos finitos externos, independentemente do número de nós e graus de liberdade. Como foi salientado na seção anterior, o trabalho de implementação do elemento finito foi supervisionado pelo Prof. Dr. Ricardo Picón, membro essencial do grupo de pesquisas que visa o desenvolvimento da MDC.

De forma básica, a implementação numérica funciona em dois níveis: global e local. O nível global reúne um conjunto de rotinas que resolvem as equações de equilíbrio. Já o local apresenta uma rotina que contém, no caso deste trabalho, o elemento finito da MDCX proposto, representando o material e sendo responsável pelo comportamento estrutural. O código do elemento finito está em linguagem FORTRAN. A separação da solução numérica em nível global e local, além de possibilitar a inclusão da formulação e das variáveis internas do modelo de forma mais simples, melhora a convergência da solução diante do fenômeno do amolecimento. O procedimento clássico, que envolve o cálculo global e local ao mesmo tempo, torna-se ineficiente.

O modelo de chapa proposto é definido pela equação cinemática que permite o cálculo das deformações generalizadas a partir dos deslocamentos nodais, pela lei constitutiva e de dano

que fornecem as tensões generalizadas e as variáveis internas relacionadas ao dano e finalmente pela equação de equilíbrio que retorna as forças nodais a partir das tensões.

A nível do programa para cálculo da estrutura completa, ou seja, essencialmente levando em conta a resolução do problema global, o programa funciona com base em diversas rotinas e sub-rotinas encarregadas de calcular cada passo do processo de análise. O elemento finito é fundamentalmente inserido na rotina que calcula as forças internas a partir dos deslocamentos, no que se constitui o problema local que é resolvido para cada elemento da malha.

Primeiro é feita a leitura dos dados do problema por meio de um arquivo de entrada no qual são descritos o número de nós e suas coordenadas (x, y) , o número de elementos e a montagem da malha, o tipo de elemento adotado e as condições de contorno. Em seguida é feita uma discretização da solicitação do problema, ou seja, no caso de uma estrutura submetida a um deslocamento imposto, tal valor de deslocamento será incrementado mediante diversos passos de análise. Para cada passo t é efetuado o cálculo da estrutura que será exposto por meio de uma impressão de dados em forma de tabelas e gráficos. Atingido o passo final t_f , ou seja, o valor de deslocamento imposto total, a análise do problema está finalizada. Os passos dessa etapa estão ilustrados no fluxograma azul da Figura 3.5.

O cálculo da estrutura em cada passo t é definido pelo problema global que implica na solução da equação de equilíbrio do problema reescrita na forma de força residual $\{FR\}$ (3.2).

$$\{FR\} = \iiint [B]^T \{\sigma\} dV - \{Q\} = \{0\} \quad (3.2)$$

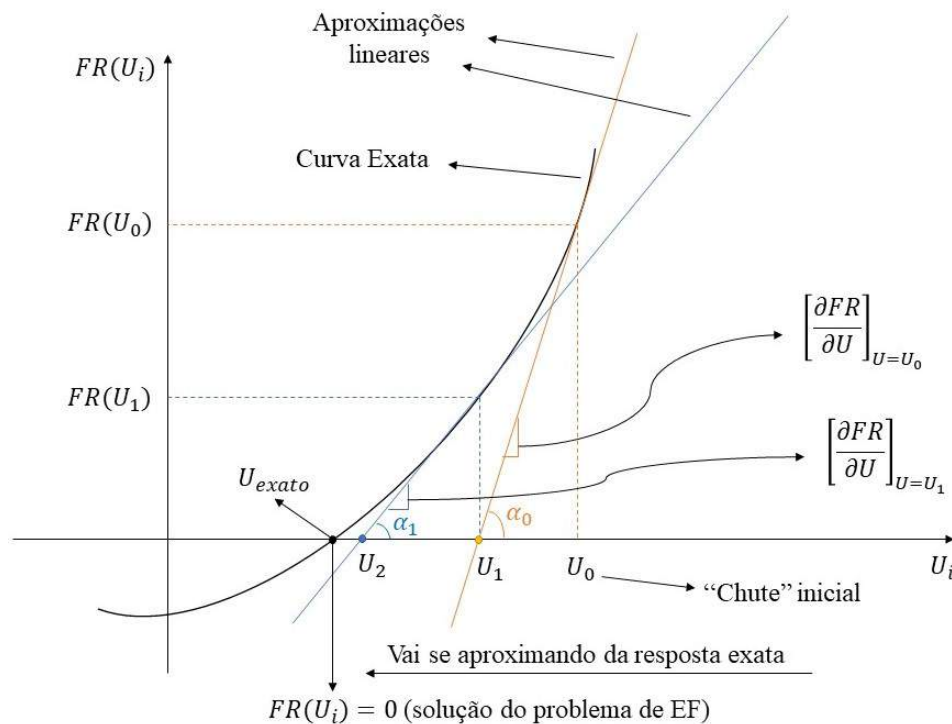
Nesse cálculo são consideradas as condições de contorno do problema que são dadas por deslocamentos prescritos em regiões onde forças são desconhecidas ou por forças prescritas em regiões onde deslocamentos são desconhecidos. A solução do problema é obtida apenas quando o vetor de força residual é nulo, o qual é dado pela diferença entre forças internas e externas. O sistema de equações de equilíbrio globais da estrutura é, em geral, não linear. Logo, tal sistema deve ser resolvido por linearização do problema com uso de algum método de correção da estimativa da solução. Para isso, primeiro se faz necessário um chute inicial para o vetor de deslocamentos nodais da estrutura, o qual é dado pela solução elástica do problema. Em seguida é feito o cálculo do vetor de forças residuais e caso esse vetor seja zero, foi obtida a solução da estrutura para esse passo. Caso a análise apresente alguma força residual, é calculada a chamada matriz de rigidez tangente da estrutura ou matriz jacobiana global $(\partial FR(U)/\partial U)$, essa matriz

possibilita a obtenção de um novo valor para o vetor de deslocamentos nodais da estrutura. Esse valor é calculado segundo a equação:

$$\left[\frac{\partial FR}{\partial U} \right]_{U=U_i} \{U_{i+1} - U_i\} + \{FR(U_i)\} = 0 \quad (3.3)$$

O processo é repetido até que se atinja uma força residual nula. Esse processo é feito com base no método de Newton-Raphson que está ilustrado para um caso geral na Figura 3.4. Os passos dessa etapa estão ilustrados no fluxograma vermelho da Figura 3.5.

Figura 3.4 - Ilustração do funcionamento do método de Newton-Raphson



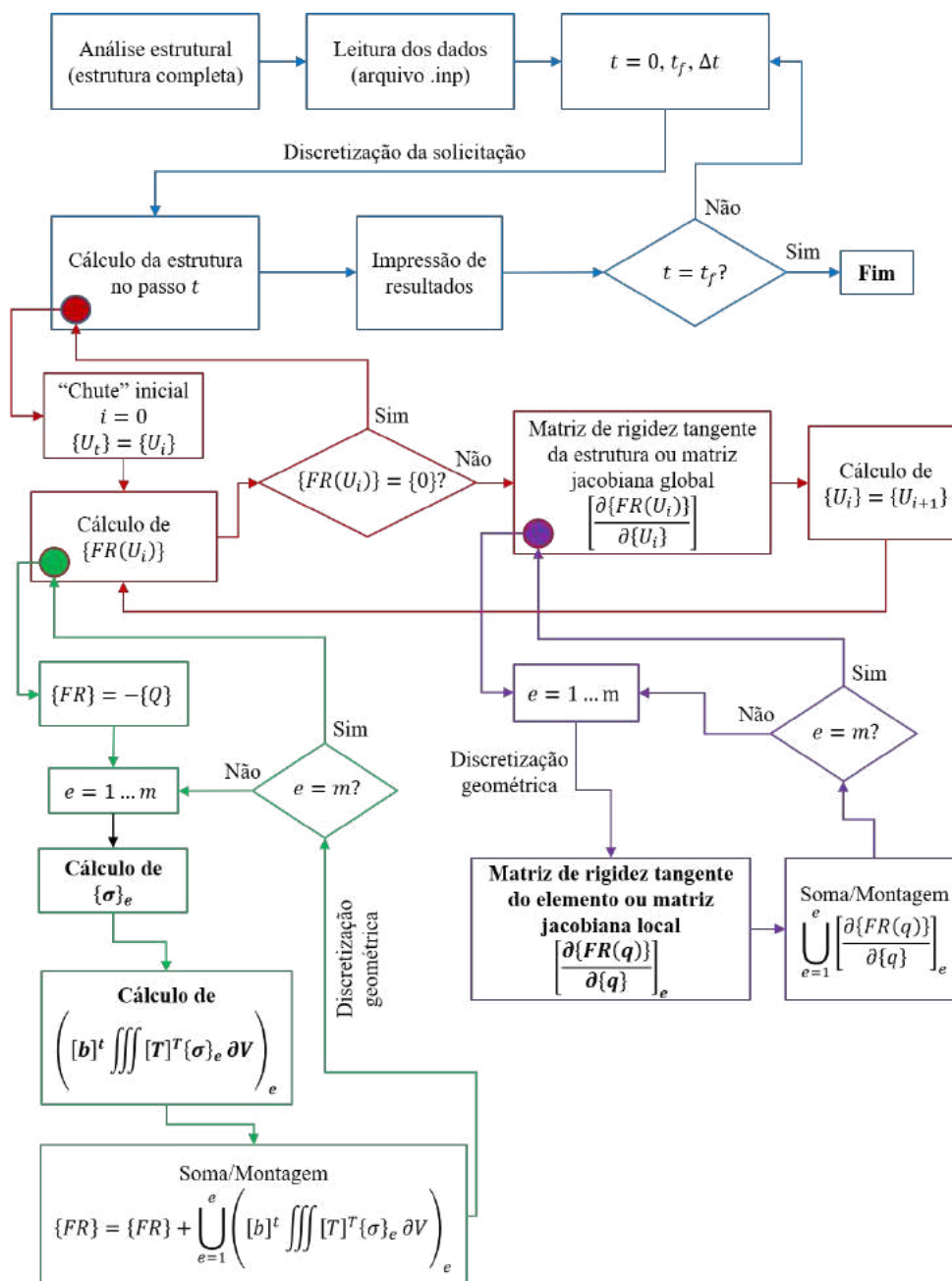
Fonte: O autor

Para o cálculo do vetor de forças residuais $\{FR\}$, como o primeiro cálculo do programa sempre prevê um deslocamento imposto nulo ($t = 0$), inicialmente o vetor de forças residuais é igual ao vetor de forças externas já que as tensões são inicialmente nulas. Em seguida é feita uma discretização geométrica na qual são calculadas as forças internas para cada elemento da estrutura. Para cada elemento são encontradas as tensões e é calculada a integral que será

somada ao vetor de forças residuais da estrutura por meio de um processo de expansão e montagem até que se tenha calculado todos os elementos. Os passos dessa etapa estão ilustrados no fluxograma verde da Figura 3.5. Os termos em **negrito** fazem parte do cálculo da rotina do elemento externo cujo processo está melhor descrito no fluxograma do elemento ilustrado mais a diante na Figura 3.6.

A rotina de cálculo da matriz jacobiana global funciona também a partir de uma discretização geométrica onde para cada elemento é calculada a matriz jacobiana local que são somadas por um processo de expansão e montagem para formar a matriz jacobiana da estrutura. Os passos dessa etapa estão ilustrados no fluxograma roxo da Figura 3.5. O termo em **negrito** faz parte do cálculo da rotina do elemento externo e também será melhor descrito a seguir.

Figura 3.5 - Algoritmo de funcionamento do programa de análise



Fonte: O autor

Entendido o processo geral do programa, é possível a inserção de diferentes tipos de elemento que seguem uma rotina conforme seu modelo estrutural a partir de formulações próprias. A nível do elemento finito (problema local) proposto neste trabalho, o algoritmo percorre alguns passos que serão descritos a seguir, o objetivo é o cálculo das tensões, das variáveis de dano e também do jacobiano local. É importante reforçar que, como está ilustrado no fluxograma da Figura 3.5, os cálculos são repetidos elemento a elemento que juntos posteriormente compõem a estrutura completa que é resolvida pelo programa de análise pelo

MEF (problema global). O índice e na formulação dessa seção indica uma variável pertencente ao elemento, diferenciando do fluxograma da estrutura.

Inicialmente, a partir dos deslocamentos nodais $\{q\}_e$, provenientes da estimativa inicial elástica, são calculadas as deformações generalizadas ou alongamentos (numexes) $\{\delta\}_e$. Esse cálculo é feito com base na equação cinemática usando a matriz $[b]$.

$$\{\delta\}_e = [b]\{q\}_e \quad (3.4)$$

Em seguida, a partir dos numexes $\{\delta\}_e$ são calculadas as tensões generalizadas $\{\sigma\}_e$ e, se houver, as espessuras das bandas de localização $\{e\}_e$ que representam o efeito do dano nesse modelo. Esse cálculo é feito usando a lei de comportamento do modelo, ou equação constitutiva

$$\{\sigma\}_e = [H][T](\{\delta\}_e - \{\delta^d\}_e) \quad (3.5)$$

em conjunto com as oito leis de evolução do dano ou das bandas de localização. Por exemplo, no nó i da banda ij , a lei pode ser escrita como:

$$g_{i,ij} = \sigma_{n_{i,ij}} - \sigma_{cr_{i,ij}} \left(1 - \frac{e_{i,ij}}{\delta_{u_{i,ij}}} \right) \quad (3.6)$$

e assim por diante nos demais nós de cada banda. Como se trata de um problema inelástico não linear, o cálculo é feito sob um esquema de predição, verificação e correção (ou não) dos resultados em caráter local, ou seja, a nível do elemento.

Segundo Amorim (2016), uma característica especial desse tipo de problema local é que as condições de convergência variam significativamente com o dano, por exemplo, quanto maior o valor do dano a ser calculado, menor deve ser o tamanho do incremento. Além disso, incrementos de carregamento são geralmente seguidos por concentração de dano em poucas bandas de localização já que surge uma faixa de concentração principal que será finalmente a zona de falha estrutural. Sendo assim, dado a natureza altamente não linear de problemas de localização de deformações, são necessários procedimentos numéricos robustos para que o programa encontre convergência.

A rotina do preditor funciona da seguinte forma: inicialmente é feita uma predição elástica, ou seja, as tensões são calculadas supondo um regime elástico. Nesse momento, as

espessuras de banda, e por consequência os *numexes* de dano, são nulos já que ainda não foi identificado dano. Caso fosse uma etapa já com a presença de espessuras de banda, o vetor de *numexes* de dano seria computado para efetuar o cálculo das tensões do passo atual, no entanto, nesse caso, a predição elástica é dada por uma variação de dano nula. Isso ocorre devido ao modelo proposto: como foi exemplificado para o caso uniaxial, elementos que experimentaram dano podem a partir de determinado passo trabalhar em regime elástico já que o dano tende a se concentrar em poucos elementos pertencentes a região da banda de localização.

Em seguida são calculadas as tensões normais nos nós e é feita a verificação da ativação ou não de cada uma das bandas com base na lei de evolução. Tomando novamente por exemplo o nó i da banda ij , se $g_{i,ij} > 0$, a banda está ativa neste ponto já que segundo a formulação da lei de evolução, $\sigma_{n_{i,ij}} > \sigma_{cr_{i,ij}} \left(1 - e_{i,ij}/\delta_{u_{i,ij}}\right)$. Em outras palavras, a tensão normal nesse nó dessa banda superou a tensão crítica de resistência. A explicação para a necessidade do cálculo de tensões normais em cada nó do elemento está no modo de solicitação do modelo: modo I ou solicitação de abertura.

Caso as bandas não estejam ativas, a predição elástica está correta e, portanto, as tensões calculadas também. No entanto, caso a verificação aponte a ativação de alguma das bandas de localização, as tensões da predição estão, portanto, erradas e necessitam de correção devido ao incremento de dano (espessura das bandas). Entra em cena então o corretor para resolver um sistema de equações não lineares que resulta na correção das espessuras de banda e das tensões.

A rotina de correção funciona da seguinte maneira: para encontrar as tensões e espessuras de banda corretas do passo, é montada uma equação matricial que forma um sistema de equações formado pelas doze leis de estado (equações de cálculo da tensão) e pelas oito leis de evolução das bandas. Por se tratar de um sistema não linear, as equações são linearizadas e é adotado um processo de resolução, como por exemplo a eliminação de Gauss. O processo de cálculo do sistema é iterativo, de modo que caso seja atingindo um limite máximo de iterações sem uma convergência para solução do sistema, o passo é reduzido, ou seja, o incremento de deslocamento imposto desse passo é parcelado. Resolvido o sistema, são atualizados os valores de tensão e dano no elemento.

Calculadas as tensões, é possível obter as forças nodais no elemento usando a equação de equilíbrio:

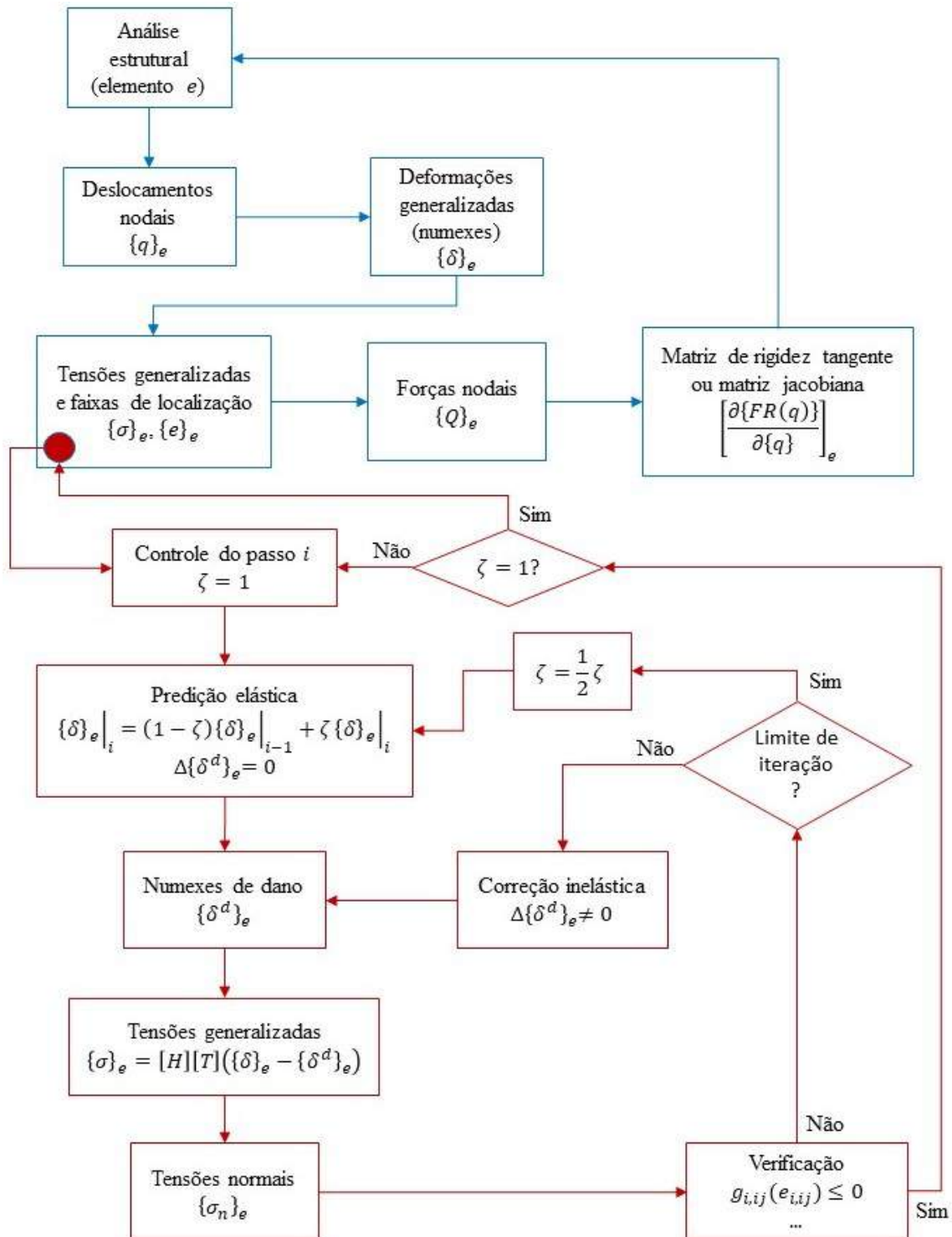
$$\{Q\}_e = [b]^t \iiint [T]^T \{\sigma\}_e \partial V \quad (3.7)$$

Após isso, finalmente é calculada a matriz de rigidez tangente do elemento, também chamada de matriz jacobiana local, que será usada para a próxima tentativa de convergência de solução, segundo método de Newton, para resolver o problema global da estrutura. Baseado na formulação da equação de equilíbrio em força residual, a matriz jacobiana é dada por $\left[\frac{\partial \{FR(q)\}}{\partial \{q\}} \right]_e$, sendo

$$\{FR\}_e = [b]^t \iiint [T]^T \{\sigma\}_e \partial V - \{Q\}_e \quad (3.8)$$

O processo de cálculo do problema local para cada elemento está ilustrado no fluxograma da Figura 3.6. O caminho em azul descreve os passos gerais que terminam no cálculo da matriz jacobiana do elemento. O caminho em vermelho descreve basicamente o esquema de predição e correção necessárias para o cálculo das tensões generalizadas e da variável de dano do modelo.

Figura 3.6 - Algoritmo de processos do elemento finito

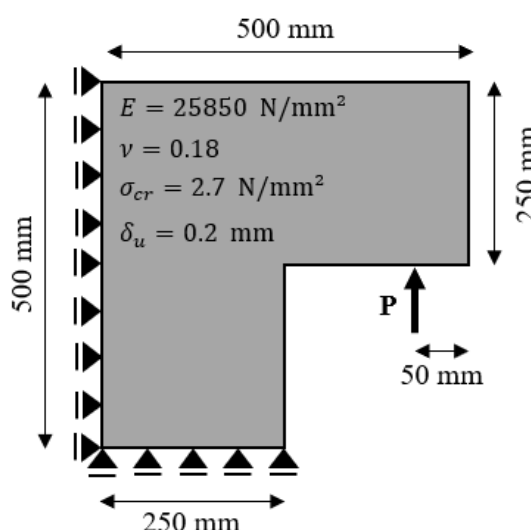


Fonte: O autor

4. SIMULAÇÕES NUMÉRICAS E RESULTADOS

Dentre as primeiras tentativas de simulação, o novo elemento proposto foi aplicado à uma chapa em formato de “L” sujeita a restrições e deslocamento indicados na Figura 4.1. A chapa está impedida na base na direção y , na lateral esquerda na direção x e é submetida a um deslocamento imposto no ponto P, distante 50 mm da borda direita. Na Figura 4.1 também estão apresentadas as propriedades do material e as dimensões do sólido. Esse exemplo foi baseado no trabalho de Rodrigues (2015).

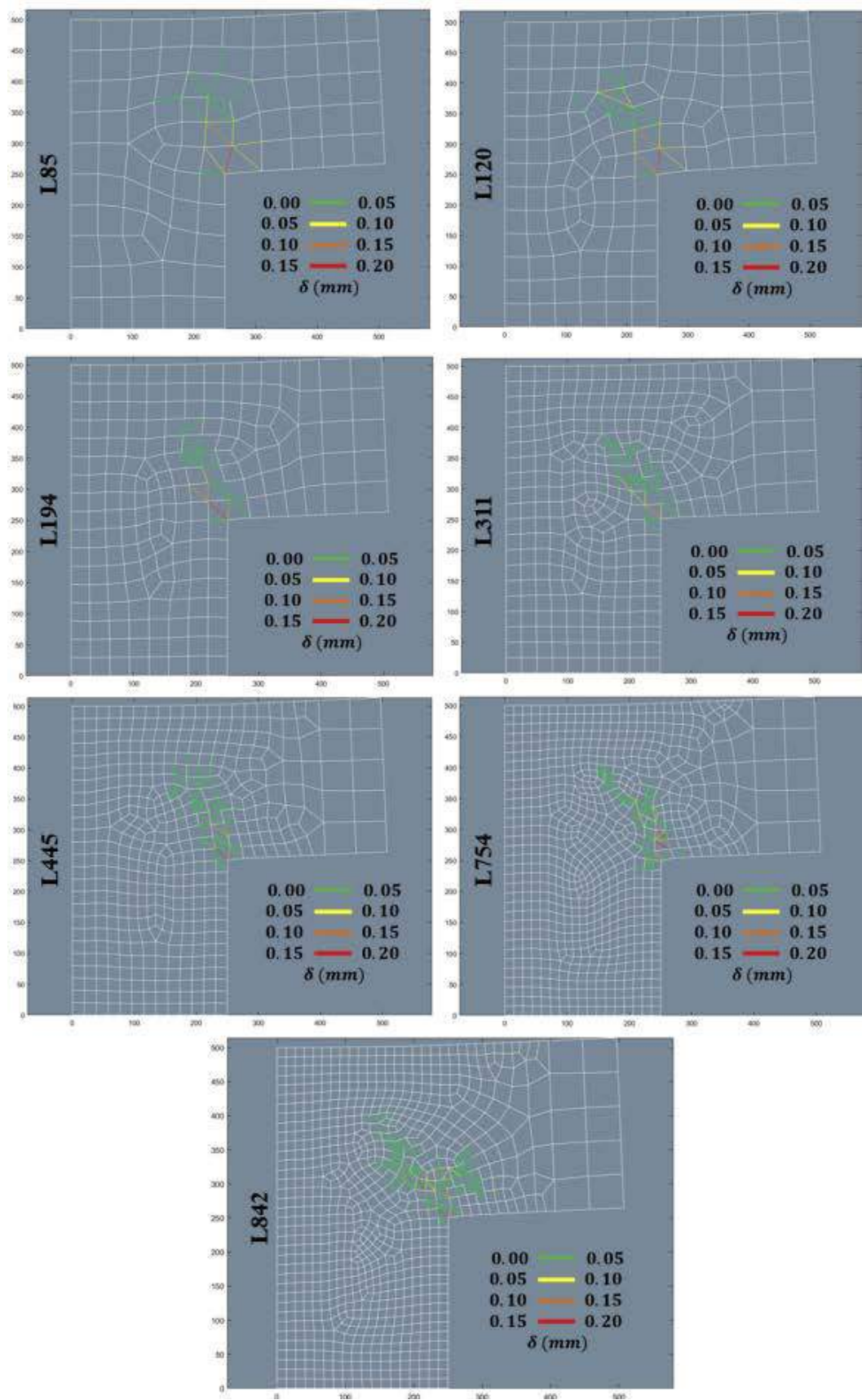
Figura 4.1 - Chapa em L (Rodrigues): geometria, propriedades e condições de contorno



Fonte: O autor

Para comprovar a convergência da solução e a independência de malha do modelo, foi realizado um estudo de convergência com sete malhas (L85, L120, L194, L311, L445, L754 e L842), no qual o número após a letra “L” indica a quantidade de elementos finitos. A Figura 4.2 apresenta a estrutura final deformada para cada uma das malhas adotadas. As malhas foram geradas aleatoriamente e com formas irregulares, com exceção da região da aplicação do deslocamento imposto onde foi mantida uma malha fixa com elementos maiores. Esse cuidado foi tomado para impedir que apareça uma singularidade de tensão na região de solicitação, já que numericamente se trata de uma aplicação pontual.

Figura 4.2 – Deformada da Chapa L (Rodrigues) – altura vs. comprimento



Fonte: O autor

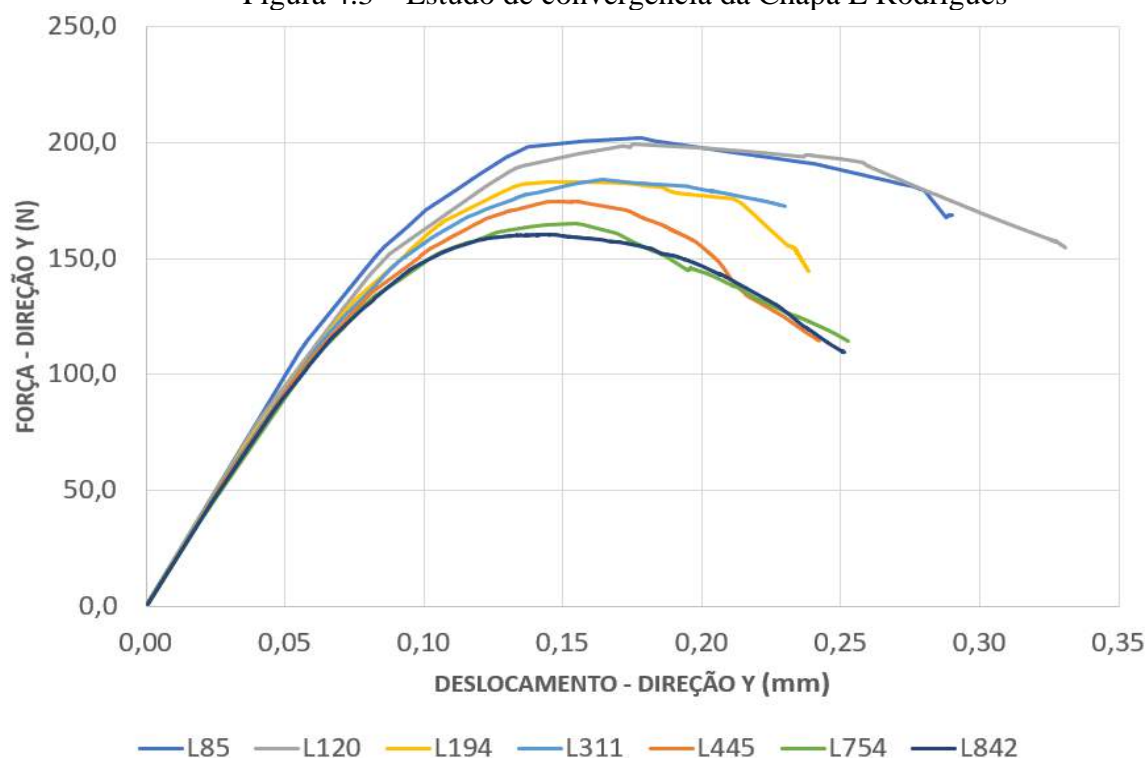
As malhas deformadas foram geradas a partir de um pós-processador que lê os dados de saída do programa e gera a representação gráfica. Como o elemento possui nós e, portanto, espessuras de banda apenas nos vértices, o pós-processador interpola linearmente a espessura de cada banda entre seus respectivos nós. Cada cor define um valor de alongamento dos numexes que varia de zero até o valor de alongamento último, definido como 0.2 mm para esse exemplo. Uma legenda em cada malha da Figura 4.2 informa a escala de cores adotada.

Apesar de não haver dados experimentais de referência, conforme os resultados obtidos por Rodrigues (2015) e esperados para a configuração estrutural do problema, o caminho de surgimento das bandas de localização foge do esperado fisicamente. Esperava-se uma direção mais vertical do que a diagonal aparente nos resultados da Figura 4.2. Esse caminho é fisicamente a superfície de ruptura do elemento onde o processo de fissuração se concentra gerando fratura e colapso final.

Como foi constatado em seguida, a divergência na análise se deu por conta, principalmente, de um problema na formação das malhas. Como a geração é aleatória, em alguns pontos, o gerador da malha estava rotacionando os elementos, de forma que em alguns pontos não foi previsto a formação de bandas. Como foi apresentado, o elemento não possui previsão de bandas em duas de suas laterais e com isso, ao rotacionar os elementos, o programa faz coincidir dois lados sem bandas entre elementos vizinhos, comprometendo os resultados. Para solucionar o problema, por hora, foram abandonadas as análises com malha irregular já que seria muito complicado manter a aleatoriedade de geração da malha e regularizar a questão da rotação e má formação das malhas. Além disso, devido a irregularidade inerente a cada elemento irregular, estavam ocorrendo problemas de convergência que também comprometiam as análises, principalmente nesta etapa inicial da pesquisa. Esse problema da rotação será melhor explicado nos exemplos adiante.

Ainda assim, sobre a formação das bandas de localização, o alongamento último dos numexes é atingido no vértice interno do elemento estrutural, como esperado. A Figura 4.3 apresenta as curvas de força vs. deslocamento na direção y para o ponto P onde foi imposto o deslocamento na estrutura. Cada curva representa resultados de cada malha adotada. Com esse gráfico, pode-se constatar a convergência de resultados para uma solução única na medida em que se refina a malha, fato esse que é o esperado para uma análise pelo MEF. Isso demonstra que o elemento proposto apresenta propriedades de independência de malha e traz resultados objetivos, apesar dos problemas descritos.

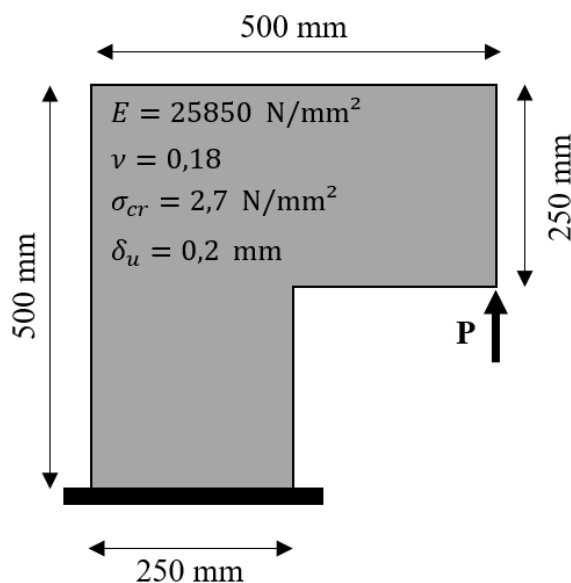
Figura 4.3 – Estudo de convergência da Chapa L Rodrigues



Fonte: O autor

Diante dos entraves descritos, o mesmo exemplo numérico apresentado por Amorim (2016) foi simulado em um programa de análise por elementos finitos, desta vez utilizando o novo elemento proposto definido na seção 3.1. A Figura 4.4 ilustra o problema, na qual são apresentadas as condições de contorno, propriedades do material e dimensões do sólido. A chapa em formato de “L” está fixada na base e submetida a um deslocamento imposto no ponto P.

Figura 4.4 - Chapa em L (Amorim): geometria, propriedades e condições de contorno

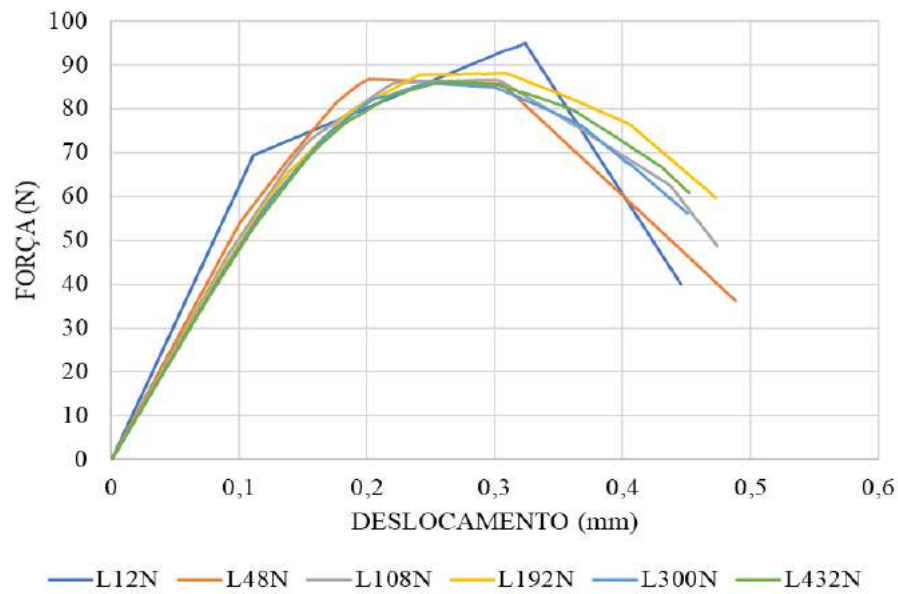


Fonte: O autor

Para efeito comparativo, foi realizado um estudo de convergência com as mesmas seis malhas (L12N, L48N, L108N, L192N, L300N e L432N) simuladas por Amorim (2016). O numeral após a letra “L” significa o número de elementos finitos utilizados na respectiva análise, já a letra “N” ao final serve para identificar que a simulação é referente ao novo elemento proposto. Apesar do novo elemento permitir malhas com elementos finitos irregulares, a escolha de malhas regulares nesta fase inicial de estudo foi motivada para eliminar possíveis variáveis relacionadas à forma dos elementos que possam trazer uma maior instabilidade na análise, gerando problemas de convergência indesejados. Isso foi possível uma vez que a geometria do problema permite o uso de malhas regulares. Além disso, neste exemplo em particular, adotou-se malhas regulares para possibilitar uma comparação fidedigna com os resultados obtidos por Amorim (2016), que também fez uso desse tipo de malha.

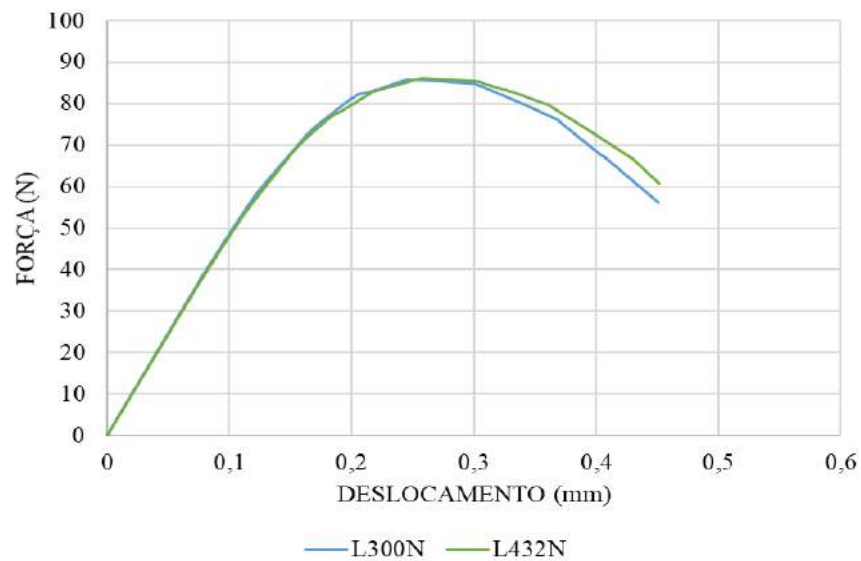
A Figura 4.5 apresenta as curvas de força vs. deslocamento na direção y para o ponto P, onde foi imposto o deslocamento na estrutura sob análise. Cada curva representa uma das malhas adotadas conforme legenda. Com esse gráfico, pode-se constatar a tendência de convergência dos resultados para uma solução única na medida em que se refina a malha, fato esse que é o esperado para uma análise pelo MEF. A Figura 4.6 apresenta as malhas mais refinadas para uma melhor visualização da objetividade da solução.

Figura 4.5 - Estudo de convergência da chapa “L” (todas as malhas)



Fonte: O autor

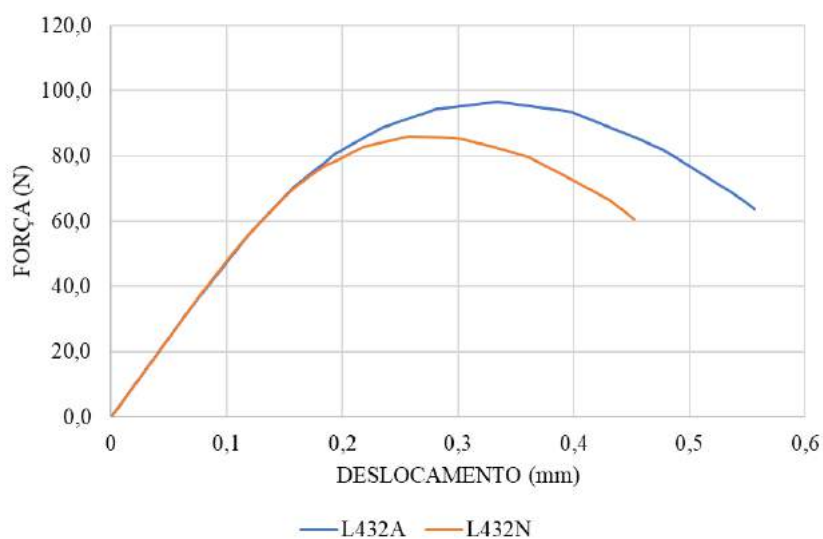
Figura 4.6 - Estudo de convergência da chapa “L” (malhas refinadas)



Fonte: O autor

No entanto, tomando a malha L432N como referência, ao se comparar com os resultados obtidos por Amorim (2016), pode-se observar uma forte discrepância nos resultados (Figura 4.7), fato esse que não deveria ocorrer, já que se trata do mesmo problema físico, apenas com elementos finitos diferentes. Na Figura 4.7, a curva L432N refere-se a simulação com o novo elemento, e a L432A refere-se a simulação de Amorim (2016).

Figura 4.7 – Análise comparativa da malha L432



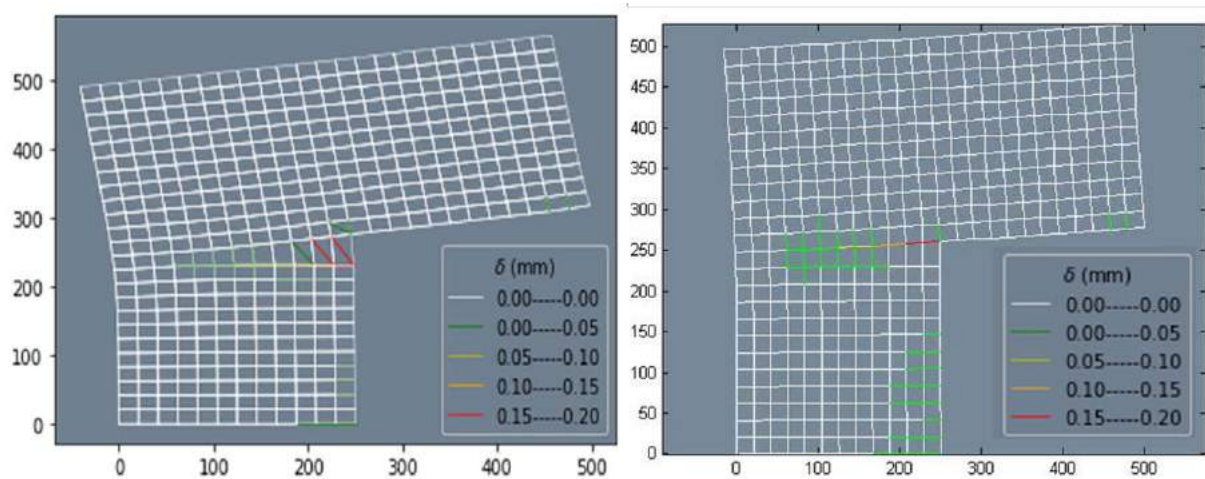
Fonte: O autor

A explicação para tal divergência está na própria constituição do elemento finito usado em cada análise, mais precisamente em relação ao local de previsão de formação das bandas de localização. Como foi apresentado na Figura 3.1, o novo elemento proposto possui bandas apenas em dois dos seus lados, de modo que a depender da orientação de nós adotada na geração da malha, pode-se obter um resultado final tendencioso. Ao não encontrar um caminho previsto de bandas na direção da formação da falha, o programa busca a banda mais próxima que no caso do novo elemento proposto é uma banda diagonal, provocando uma tendência que leva a resultados diferentes se comparado com o elemento de Amorim (2016) que possui bandas em todos os lados do elemento finito.

A Figura 4.8 apresenta a estrutura final deformada da malha L432 em conjunto com a formação das bandas de localização, tanto da simulação com o elemento de Amorim (2016), quanto com o novo elemento. Imaginando-se que a estrutura está dividida em quadrantes para efeito de análise do problema, o elemento com tendência a surgimento da primeira banda é o elemento do canto superior direito do quadrante inferior esquerdo. Na análise da direita, feita por Amorim (2016), o programa encontra uma banda prevista na região superior, e portanto a região de falha começa a partir desse ponto, como esperado. Já na análise da esquerda, que faz uso do novo elemento, por não encontrar banda prevista na região superior, o programa compensa essa falha ativando a banda do lado inferior e também a diagonal, em busca de

encontrar o caminho esperado da falha que se daria prioritariamente pela banda superior inexistente.

Figura 4.8 – Configuração deformada: L432N (esquerda) e L432A (direita)



Fonte: O autor

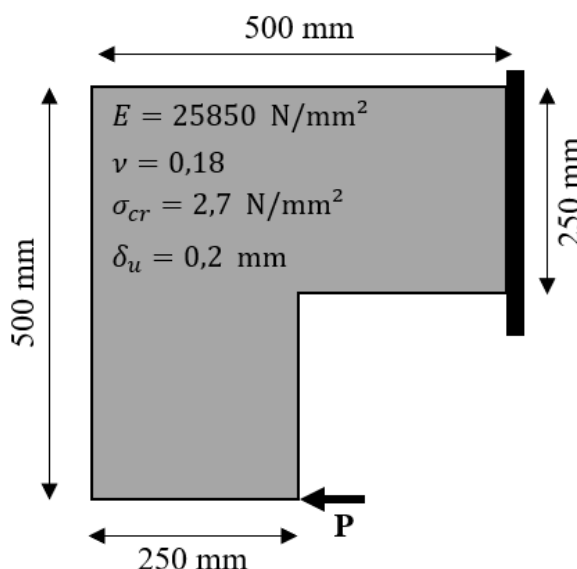
As malhas deformadas foram geradas a partir de um pós-processador que lê os dados de saída do programa de análise e gera a representação gráfica. Como o elemento possui nós e, portanto, espessuras de banda apenas nos vértices, o pós-processador interpola linearmente a espessura de cada banda entre seus respectivos nós. Cada cor na legenda da Figura 4.8 define um valor de alongamento dos *numex* que varia de zero até o valor de alongamento último, definido como 0.2 mm para esse exemplo.

Diante do que foi apresentado, pode-se dizer, apesar de não haver dados experimentais de referência, que o caminho de surgimento das bandas de localização condiz com o esperado fisicamente para o problema, dadas as condições de contorno adotadas. Esse caminho é fisicamente a superfície de ruptura do elemento onde o processo de fissuração se concentra gerando fratura e colapso final. O alongamento último do *numex* é atingido no vértice interno do elemento estrutural, como esperado. A simulação apresenta uma ativação de banda em outros locais devido ao surgimento de tensões, que, no entanto, não chegam a progredir para o alongamento último. A região de dano concentrado é o vértice interno da estrutura.

Para atestar o que foi concluído relativamente ao problema ocasionado devido a não previsão de bandas de localização em todos os lados do novo elemento, foi feita uma outra simulação da mesma estrutura com alteração unicamente da região das condições de contorno

conforme é apresentado na Figura 4.9. Ou seja, o posicionamento dos elementos e da malha foi mantido, de forma que a previsão das bandas se mantém nos mesmos locais.

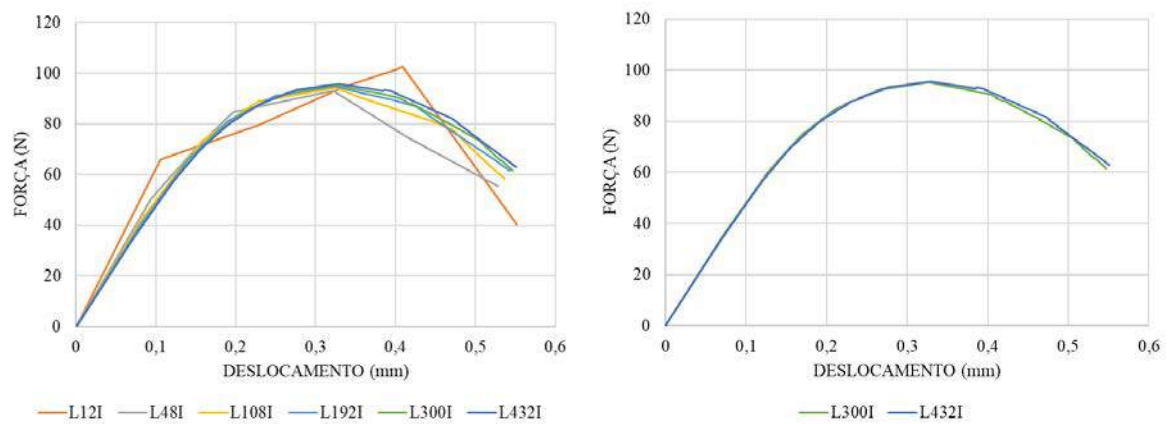
Figura 4.9 – Configuração da chapa em “L” invertida



Fonte: O autor

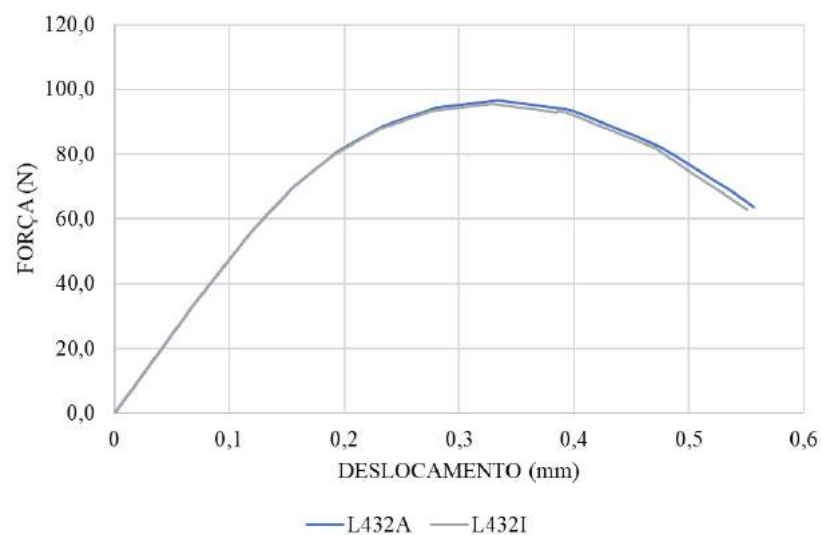
Nessa simulação, a lateral na região direita está fixada e foi imposto um deslocamento no ponto P, nos mesmos moldes do exemplo anterior. Trata-se do mesmo problema físico já que a estrutura apresenta simetria nas dimensões, a diferença está em qual elemento será ativado primeiro, sendo nesse caso o elemento inferior esquerdo do quadrante superior direito. Nesse elemento, há a previsão de formação de banda na lateral esquerda ao se adotar o novo elemento finito proposto e assim os resultados são compatíveis com os encontrados por Amorim (2016). Os gráficos da Figura 4.10 apresentam a convergência da simulação na medida em que se refina a malha onde cada curva representa a simulação com uso das mesmas seis malhas utilizadas no exemplo anterior, agora identificadas pela letra I ao final indicando a nova configuração do problema com o L invertido. A Figura 4.11 apresenta a comparação entre a simulação com o novo elemento na condição do “L” invertido e a simulação original de Amorim (2016), mostrando a coerência nos resultados obtidos e a objetividade de solução, a malha adotada como referência para essa comparação foi a L432.

Figura 4.10 - Estudo de convergência da chapa “L” invertida



Fonte: O autor

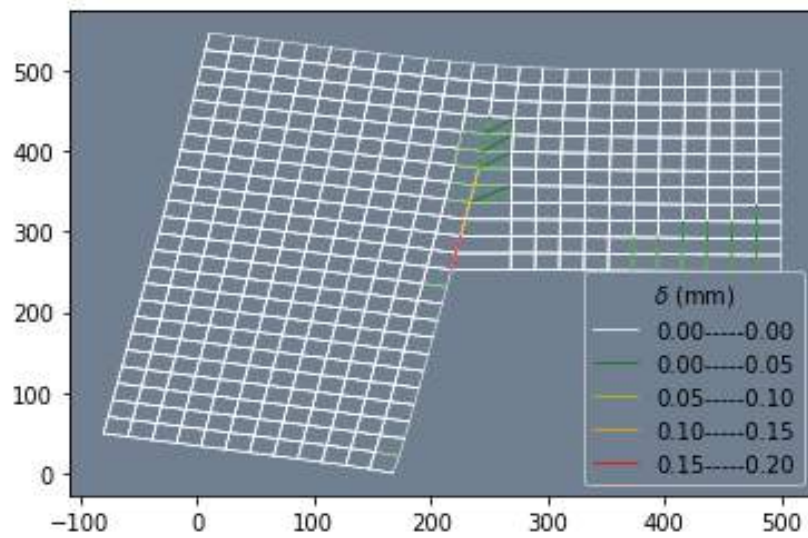
Figura 4.11 - Análise comparativa “L” invertido (malha L432)



Fonte: O autor

A Figura 4.12 apresenta a configuração deformada da estrutura com a malha mais refinada (L432I), na qual pode ser observado a formação das bandas de localização em conformidade com o esperado. Nota-se nesse caso a formação de bandas de localização diagonais na medida em que a falha se aproxima da região superior do elemento estrutural, demonstrando que ocorre uma redistribuição de esforços nesse ponto da análise.

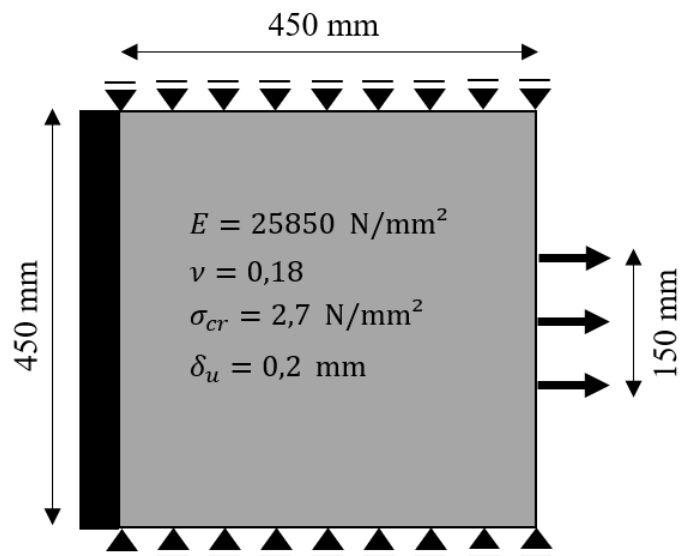
Figura 4.12 – Configuração deformada “L” invertido malha L432I (altura x comprimento)



Fonte: O autor

A segunda simulação trata-se de uma chapa quadrada submetida a tração no terço médio da sua lateral. A peça está totalmente fixada na lateral esquerda sendo que na base e no topo é permitido o deslocamento na direção X . Na Figura 4.13 são apresentadas condições de contorno, propriedades do material e dimensões do sólido em questão.

Figura 4.13 – Chapa tracionada: configuração

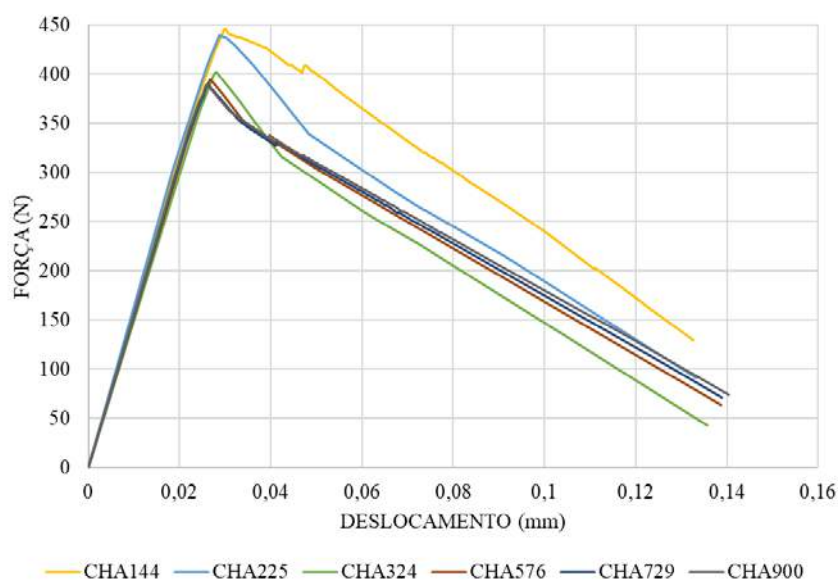


Fonte: O autor

O novo elemento finito proposto foi aplicado a esse problema e simulado através de um programa de elementos finitos. As malhas usadas foram regulares a fim de evitar problemas com a forma dos elementos e variações na região de previsão das bandas já que nas malhas irregulares a aleatoriedade na construção dos elementos possibilita elementos rotacionados, tornando-se difícil a regularização da região onde se prevê formação de bandas de localização conforme problemática apresentada no exemplo anterior da chapa “L”. Esse cuidado, neste momento da pesquisa, possibilita eliminar parâmetros de incertezas. Portanto, as malhas foram as seguintes: CHA144, CHA225, CHA324, CHA576, CHA729 e CHA900, onde o numeral significa o número de elementos adotados na análise.

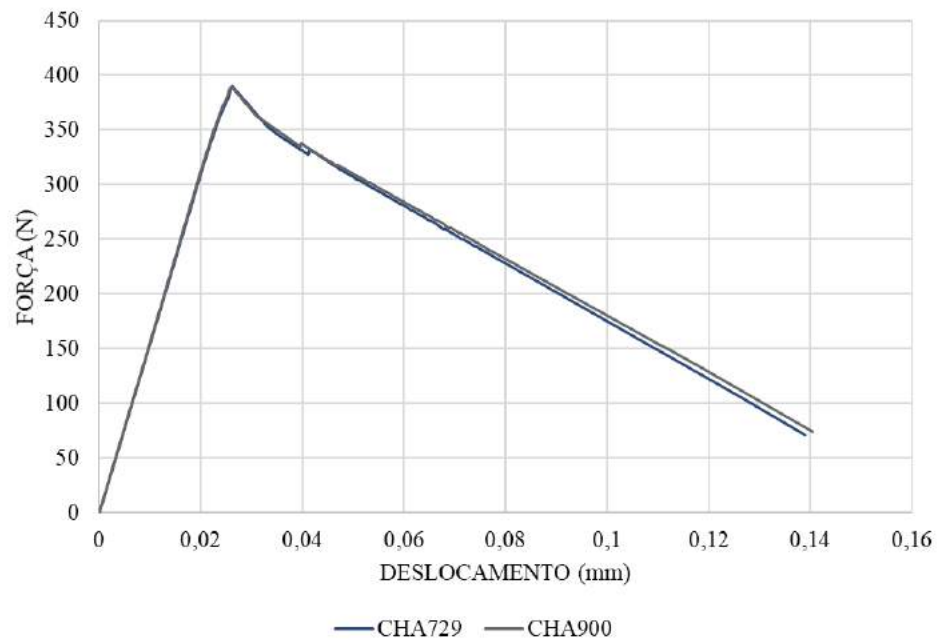
A Figura 4.14 apresenta as curvas resultantes da análise de cada malha, na qual pode ser observada a convergência para uma solução única na medida em que se aumenta o número de elementos. A Figura 4.15 destaca apenas as duas malhas com maior quantidade de elementos a fim de facilitar a visualização do aspecto da convergência atingida com a solução. A Figura 4.16 destaca a condição deformada da malha mais refinada, bem como o surgimento de bandas de localização, formando a superfície de ruptura esperada para o problema. Além disso, pode ser destacado o surgimento de bandas de localização na diagonal, acompanhando o formato da zona de falha. Na Figura 4.17, são apresentadas as configurações deformadas de todas as seis malhas utilizadas na presente análise para efeito de comparação.

Figura 4.14 – Chapa tracionada: convergência dos resultados (todas as malhas)



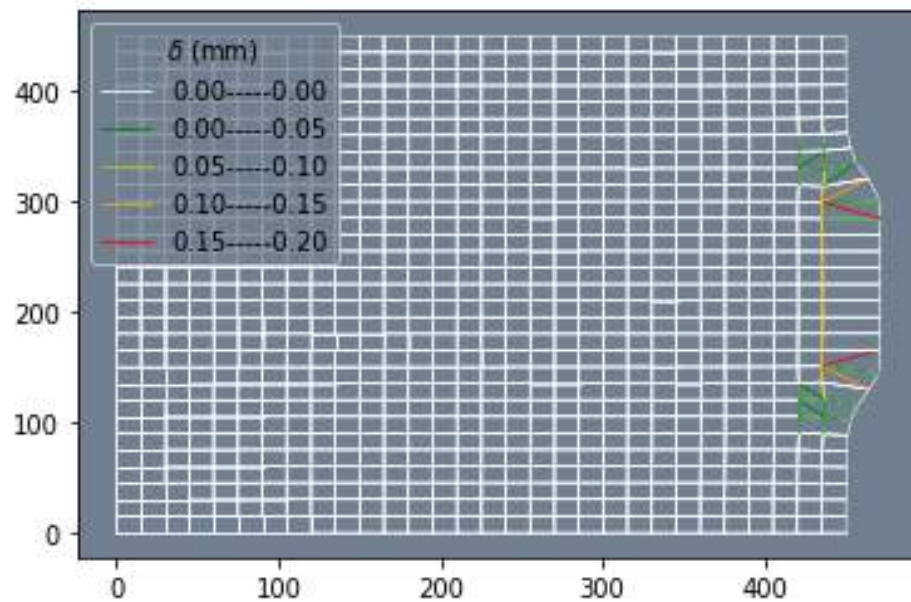
Fonte: O autor

Figura 4.15 – Chapa tracionada: convergência dos resultados (malhas refinadas)



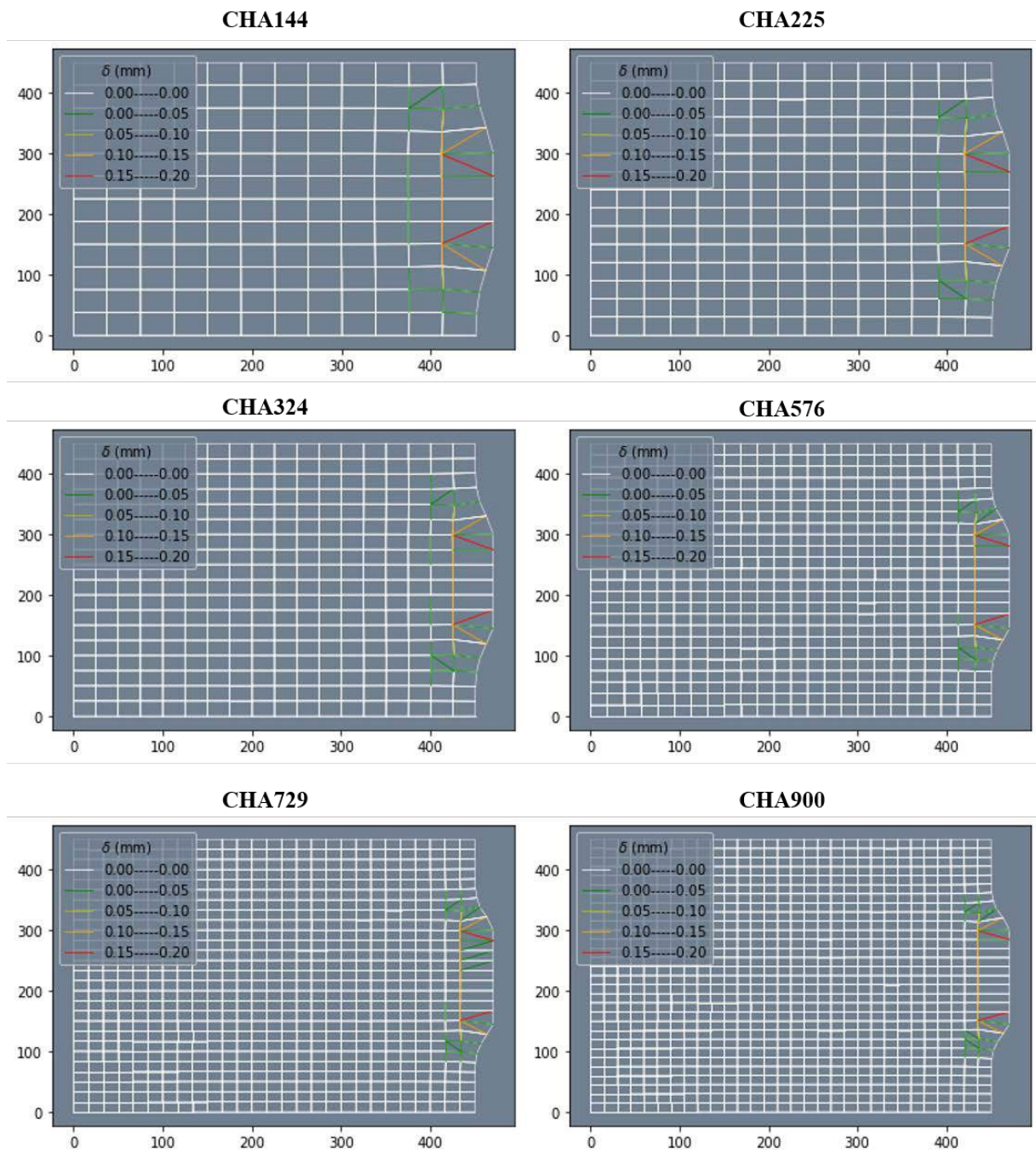
Fonte: O autor

Figura 4.16 – Chapa tracionada: configuração deformada CHA900



Fonte: O autor

Figura 4.17 –Chapa tracionada: configurações deformadas (altura x comprimento)



Fonte: O autor

5. CONCLUSÕES

Diante da comparação feita neste trabalho referente à chapa em forma de “L”, existem melhorias a serem implementadas no novo elemento proposto. Os resultados apontam a objetividade de solução e a convergência para uma solução única na medida em que se refina a malha de elementos finitos em ambos os exemplos apresentados. A configuração deformada e a formação de bandas de localização também se mostram condizentes com o esperado para falha das estruturas diante das condições de contorno dos problemas. No entanto, o fato do elemento quadrilateral possuir bandas previstas apenas em dois dos seus lados contribui para eventuais erros de análise diante da forte tendência no caminho de formação das bandas, como foi demonstrado no primeiro exemplo numérico. Com isso, uma possível solução para o problema é incluir bandas nos outros lados do elemento, de forma a resultar em um elemento totalmente simétrico e eliminar esse tipo de erro de análise. O elemento ficaria, portanto, com seis bandas de localização, sendo quatro nos lados e duas diagonais.

Em paralelo, fica claro o potencial do modelo e do elemento, abrindo campo para diversos avanços. A formulação apresenta resultados independentes de malha e, em conjunto com o elemento finito, pode ser usada para solução de problemas em configurações diversas.

Existem ainda outras melhorias a serem implementadas no modelo e no elemento, de modo a englobar cada vez mais fenômenos que ocorrem nos materiais. Seguem adiante algumas propostas para trabalhos futuros.

No elemento proposto neste trabalho, as bandas de localização são carregadas em modo I, no entanto, uma formulação mais complexa incluindo modo II pode ser considerada. Nesse caso, as bandas teriam uma interpretação diferente, levando a deformações relacionadas ao dano e leis de evolução diferentes.

A formulação e o elemento podem ser expandidos para meios tridimensionais usando por exemplo um elemento finito hexaédrico com oito nós e vinte e quatro graus de liberdade. O campo de deformação do elemento seria caracterizado por dezoito constantes independentes e, sendo assim, o mesmo número de *numexes* deve ser introduzido.

A implementação de outras leis de dano também pode ser feita no intuito de reproduzir numericamente observações experimentais relativas aos materiais.

Adicionalmente, pode ser implementado no elemento um comportamento elasto-plástico ou até mesmo a presença de dano contínuo distribuído antes do surgimento da localização. Claro que após detecção da localização, o dano deve ser concentrado exclusivamente nas bandas como é feito na formulação atual.

REFERÊNCIAS

- ALVA, G. M. S.; EL DEBS, A. L. H. C. Application of lumped dissipation model in nonlinear analysis of reinforced concrete structures. **Engineering Structures**, v. 32, p. 974-981, 2010.
- AMORIM, David L. N. F.; PIEDADE NETO, Dorival.; PROENÇA, Sergio P. B.; FLÓREZ-LÓPEZ, Julio. On an alternative approach for the analysis of softening in continuous media. **EASEC-15**, [S. l.], 2017.
- AMORIM, David L. N. F.; PIEDADE NETO, Dorival.; PROENÇA, Sergio P. B.; FLÓREZ-LÓPEZ, Julio. The extended lumped damage mechanics: a new formulation for the analysis of softening with FE size independence. **Mechanics Research Communications**, [S. l.], v. 91, p. 13-18, 2018.
- AMORIM, D. L. N. F.; PROENÇA, S. P. B.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. A model of fracture in reinforced concrete arches based on lumped damage mechanics. **International Journal of Solids and Structures**, v. 50, n. 24, p. 4070-4079, 2013
- AMORIM, D. L. N. F.; PROENÇA, S. P. B.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. Simplified modelling of cracking in concrete: application in tunnel linings. **Engineering Structures**, v. 70, p. 23-35, 2014a.
- AMORIM, D. L. N. F.; PROENÇA, S. P. B.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. Lumped damage mechanics as an alternative to analyse masonry arches. In: International Workshop by Young Researchers for 'Application of Structural Engineering and Structural Health Monitoring to Historic Buildings', 2014, Kyoto. **Proceedings...** Uji: Kyoto University, 2014b. p. 19-25.
- AMORIM, David Leonardo Nascimento de Figueiredo. **On the lumped damage mechanics for nonlinear structural analysis: new developments and applications**. 2016. - University of São Paulo, [s. l.], 2016.
- ARAÚJO, F., PROENÇA, S.P.B. Application of a lumped dissipation model to reinforced concrete structures with the consideration of residual strains and cycles of hysteresis. **Journal of Mechanics of Materials and Structures**, v. 03, p. 1011-1031, 2008.
- BAI Y., KURATA M., FLÓREZ-LÓPEZ J., Nakashima M. Model for fatigue crack propagation and closure in steel beams subjected to non-stationary loading. **Journal of Structural Engineering (ASCE)**, Forthcoming, 2016
- BATHE, Klaus-Jurgen. **Finite element procedures**. 2. ed. Watertown, MA: Pearson Educación, 2014. *E-book*.
- BELYTSCHKO, Ted; FISH, Jacob; ENGELMANN, Bruce E. A finite element with embedded localization zones. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, [S. l.], v. 70, p. 59- 89 (31), 1988.
- BORJA, Ronaldo I. A finite element model for strain localization analysis of strongly discontinuous fields based on standard Galerkin approximation. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, [S. l.], v. 190, p. 1529- 1549 (21), 2000.

BROEK, David. **Elementary engineering fracture mechanics**. AH Dordrecht, The Netherlands: Martinus Nijhoff Publishers, 1984. *E-book*.

CIPOLLINA, A.; LÓPEZ-INOJOSA, A.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. A simplified damage mechanics approach to nonlinear analysis of frames. **Computers & Structures**, v. 54, n. 6, p. 1113-1126, 1995.

FALEIRO, J.; OLLER, S.; BARBAT, A.H. Plastic-damage analysis of reinforced concrete frames. **Engineering Computations**, v. 27, p. 57-83, 2010.

FLÓREZ-LÓPEZ, J. Modelos de daño concentrado para la simulación numérica del colapso de pórticos plano. **Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería**, [S. l.], v. 09, n. 02, p. 123-139, 1993.

FLÓREZ-LÓPEZ, Julio; MARANTE, María Eugenia; PICÓN, Ricardo. **Fracture and damage mechanics for structural engineering of frames: state-of-the-art industrial application**. Hershey, Pennsylvania, USA: IGI Global, 2015. *E-book*.

GDOUTOS, E. E. **Fracture mechanics: an introduction**. Norwell: Springer, 2005. *E-book*.

GRIFFITH, A. A. The phenomena of rupture and flow in solids. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**, [S. l.], v. 221, p. 163-198, 1921.

GRIFFITH, A. A. The theory of rupture. In: FIRST INTERNATIONAL CONGRESS OF APPLIED MECHANICS 1924, Delft. **Proceedings**. Delft: [s. n.], 1924. p. 55-63.

HASHIGUCHI, K.; PROTASOV, A. Localized necking analysis by the subloading surface model with tangential-strain rate and anisotropy. **Int. J. Plasticity**, [S. l.], v. 20, n. 10, p. 1909-1930, 2004.

IRWIN, G. R. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. **Journal of Applied Mechanics**, [S. l.], n. 24, p. 361-364, 1957.

KACHANOV, L. M. Time of the rupture process of nonlinear solid mechanics. **Otdeleniye Technicheskikh Nauk**, [S. l.], v. 8, p. 28-31, 1958.

LEMAITRE, J. **A course on damage mechanics**. [S. l.]: Springer-Verlag, 1992. *E-book*.

LEMAITRE, Jean; CHABOCHE, Jean Louis. **Mechanics of solid materials**. [S. l.]: Cambridge University Press, 1990. *E-book*.

LIU, G. R.; QUEK, S. S. **The finite element method: a practical course**. [S. l.]: Butterworth Heinemann, 2003. *E-book*.

LIU, Y.-B., LIU, J.-B. A damage beam element model for nonlinear analysis of reinforced concrete member. **Journal of Earthquake Engineering and Engineering Vibration**, v. 24, n. 02, p. 95-100, 2004.

MARANTE, María Eugenia; BENALLAL, Ahmed; FLÓREZ-LÓPEZ, Julio. Análisis de falla de sólidos inelásticos mediante la teoría de localización. **Ingeniería Acta Científica Venezolana**, [S. l.], v. 58, n. 2, p. 43-51, 2007.

MARANTE, Maria Eugenia; FLÓREZ-LÓPEZ, Julio. Plastic localization revisited. **Journal of Applied Mechanics**, [S. l.], v. 71, 2004.

MARANTE, M. E.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. Three-Dimensional Analysis of Reinforced Concrete Frames Based on Lumped Damage Mechanics. **International Journal of Solids and Structures**, v. 40, n. 19, p. 5109-5123, 2003.

MARANTE, María Eugenia; PICÓN, Ricardo; FLÓREZ-LÓPEZ, Julio. Analysis of localization in frame members with plastic hinges. **International Journal of Solids and Structures**, [S. l.], v. 41, p. 3961–3975, 2004.

MARIGO, J. J. Modelling of brittle and fatigue damage for elastic material by growth of microvoids. **Engineering Fracture Mechanics**, [S. l.], v. 21, n. 4, p. 861–874, 1985.

OLIVEIRA, João Marcos de Jesus. **Modelagem de estruturas em concreto reforçado com fibras de aço pela mecânica do dano concentrado**. Trabalho de Conclusão de Curso - Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2017.

PEERLINGS, R. H. J.; BORST, de, R.; BREKELMANS, W. A. M.; VREE, de, J. H. P.; SPEE, I. Some observations on localisation in non-local and gradient damage models. **European Journal of Mechanics. A, Solids**, [S. l.], v. 15, n. 6, p. 937- 953 (18), 1996.

PERDOMO, M. E.; RAMÍREZ, A.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. Simulation of damage in RC frames with variable axial force. **Earthquake Engineering and Structural Dynamics**, v. 28, p. 311-328, 1999

PIMENTA, Paulo de Mattos. **Fundamentos da mecânica dos sólidos e das estruturas**. São Paulo: [s. n.], 2006. *E-book*.

PROENÇA, S. P. B. **Introdução às mecânicas do dano e da fratura - notas de aula**. São Carlos: Universidade de São Paulo - Escola de Engenharia de São Carlos, 2008. *E-book*.

RABOTNOV, Y. N. Creep rupture. In: **Proceedings of the twelfth international congress of applied mechanics**. Berlin: Springer-Verlag, 1968. p. 342–349. *E-book*.

RODRIGUES, Eduardo Alexandre. **Um modelo multiescala concorrente para representar o processo de fissuração do concreto**. 2015. - Universidade de São Paulo, São Paulo/SP, 2015.

RUDNICKI, J. W.; RICE, J. R. Conditions for the localization of deformation in pressure sensitive dilatant materials. **J. Mech. Phys. Solids**, [S. l.], v. 23, 1975.

SANTORO, M.; KUNNATH, S. Damage-based RC beam element for nonlinear structural analysis. **Engineering Structures**, v. 49, 2013, p. 733-742.

STOREN, S.; RICE, J. R. Localized necking in thin sheets. **J. Mech. Phys. Solids**, [S. l.], v. 23, n. 6, p. 421–441, 1975.

TOI, Y.; HASEGAWA, K.H. Element-size independent, elasto-plastic damage analysis of framed structures using the adaptively shifted integration technique. **Computers and Structures**, v. 89, p. 2162-2168, 2011.

UZCATEGUI. **Desarrollo de un programa de elementos finitos tridimensional basado en la web**. 2012. - University of Los Andes, Venezuela, 2012.

ZHANG, Y. Q.; LU, Y.; YU, M. H. Investigation of strain localization in elastoplastic materials with transversely isotropic elasticity. **Int. J. Mech. Sci.**, [S. l.], v. 45, n. 2, p. 217–233, 2003.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The finite element method for solid and structural mechanics**. 6. ed. Oxford, UK: Elsevier, 2005. *E-book*.

APÊNDICE A – Matrizes do elemento de quatro nós da MDCX proposto por Amorim et al. (2018)

No transcorrer do texto deste trabalho, algumas matrizes, que compõem a formulação do elemento de quatro nós da MDCX, foram apresentadas em coordenadas do sistema de referência. Isso foi feito para possibilitar uma apresentação mais simples da formulação no texto principal. Aqui tais matrizes são apresentadas em coordenadas (x, y) do sistema cartesiano global, que é o sistema verdadeiramente usado na implementação do elemento nos programas de análise por elementos finitos.

A matriz de transformação cinemática $[b]$ em coordenadas cartesianas é dada por:

$$[b] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 & b_{25} & b_{26} & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{37} & b_{38} \\ 0 & 0 & b_{43} & b_{44} & b_{45} & b_{46} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{55} & b_{56} & b_{57} & b_{58} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

onde

$$b_{11} = \frac{x_i - x_j}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}} \quad (\text{A.2})$$

$$b_{12} = \frac{y_i - y_j}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}} \quad (\text{A.3})$$

$$b_{13} = \frac{x_j - x_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}} \quad (\text{A.4})$$

$$b_{14} = \frac{y_j - y_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}} \quad (\text{A.5})$$

$$b_{21} = \frac{x_i - x_k}{\sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2}} \quad (\text{A.6})$$

$$b_{22} = \frac{y_i - y_k}{\sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2}} \quad (\text{A.7})$$

$$b_{25} = \frac{x_k - x_i}{\sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2}} \quad (\text{A.8})$$

$$b_{26} = \frac{y_k - y_i}{\sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2}} \quad (\text{A.9})$$

$$b_{31} = \frac{x_i - x_l}{\sqrt{(x_l - x_i)^2 + (y_l - y_i)^2}} \quad (\text{A.10})$$

$$b_{32} = \frac{y_i - y_l}{\sqrt{(x_l - x_i)^2 + (y_l - y_i)^2}} \quad (\text{A.11})$$

$$b_{37} = \frac{x_l - x_i}{\sqrt{(x_l - x_i)^2 + (y_l - y_i)^2}} \quad (\text{A.12})$$

$$b_{38} = \frac{y_l - y_i}{\sqrt{(x_l - x_i)^2 + (y_l - y_i)^2}} \quad (\text{A.13})$$

$$b_{43} = \frac{x_j - x_k}{\sqrt{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2}} \quad (\text{A.14})$$

$$b_{44} = \frac{y_j - y_k}{\sqrt{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2}} \quad (\text{A.15})$$

$$b_{45} = \frac{x_k - x_j}{\sqrt{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2}} \quad (\text{A.16})$$

$$b_{46} = \frac{y_k - y_j}{\sqrt{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2}} \quad (\text{A.17})$$

$$b_{55} = \frac{x_k - x_l}{\sqrt{(x_l - x_k)^2 + (y_l - y_k)^2}} \quad (\text{A.18})$$

$$b_{56} = \frac{y_k - y_l}{\sqrt{(x_l - x_k)^2 + (y_l - y_k)^2}} \quad (\text{A.19})$$

$$b_{57} = \frac{x_l - x_k}{\sqrt{(x_l - x_k)^2 + (y_l - y_k)^2}} \quad (\text{A.20})$$

$$b_{58} = \frac{y_l - y_k}{\sqrt{(x_l - x_k)^2 + (y_l - y_k)^2}} \quad (\text{A.21})$$

A matriz de transformação dos *numexes* $[T]$ em coordenadas cartesianas é obtida através de manipulação matricial da equação:

$$[B] = [T][b] \quad (\text{A.22})$$

a qual, isolando-se o termo $[T]$, resulta em:

$$[T] = ([B][b]^T)([b][b]^T)^{-1} \quad (A.23)$$

A matriz cinemática convencional $[B]$ pode ser obtida por dois caminhos diferentes. No primeiro caminho, com base nas funções de forma do elemento de quatro nós ($N(x,y)$) ilustrado na Figura A.0.1, a matriz $[B]$ é dada por:

$$[B] = \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial x & 0 & \partial N_j / \partial x & 0 & \partial N_k / \partial x & 0 & \partial N_l / \partial x & 0 \\ 0 & \partial N_i / \partial y & 0 & \partial N_j / \partial y & 0 & \partial N_k / \partial y & 0 & \partial N_l / \partial y \\ \partial N_i / \partial y & \partial N_i / \partial x & \partial N_j / \partial y & \partial N_j / \partial x & \partial N_k / \partial y & \partial N_k / \partial x & \partial N_l / \partial y & \partial N_l / \partial x \end{bmatrix} \quad (A.24)$$

onde

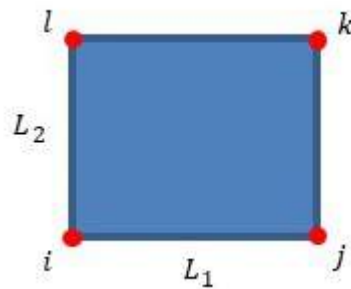
$$N_i(x,y) = \frac{1}{L_1 L_2} \left(\frac{L_1}{2} - x \right) \left(\frac{L_2}{2} - y \right) \quad (A.25)$$

$$N_j(x,y) = \frac{1}{L_1 L_2} \left(\frac{L_1}{2} + x \right) \left(\frac{L_2}{2} - y \right) \quad (A.26)$$

$$N_k(x,y) = \frac{1}{L_1 L_2} \left(\frac{L_1}{2} + x \right) \left(\frac{L_2}{2} + y \right) \quad (A.27)$$

$$N_l(x,y) = \frac{1}{L_1 L_2} \left(\frac{L_1}{2} - x \right) \left(\frac{L_2}{2} + y \right) \quad (A.28)$$

Figura A.1 - Elemento Finito de quatro nós



Fonte: O autor

No segundo caminho, com base nas deformações do elemento de quatro nós ($\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$), a matriz $[B]$ é dada por:

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial u_i} & \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial v_i} & \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial u_j} & \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial v_j} & \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial u_k} & \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial v_k} & \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial u_l} & \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial v_l} \\ \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial u_i} & \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial v_i} & \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial u_j} & \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial v_j} & \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial u_k} & \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial v_k} & \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial u_l} & \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial v_l} \\ \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial u_i} & \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial v_i} & \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial u_j} & \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial v_j} & \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial u_k} & \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial v_k} & \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial u_l} & \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial v_l} \end{bmatrix} \quad (A.29)$$

onde ε_x , ε_y , γ_{xy} são obtidas conforme equação (2.48) após serem encontrados os valores das constantes.

Por ambos os caminhos, a matriz $[B]$ resultante é a mesma.

A matriz de coeficientes elásticos $[H]$, para um estado plano de tensões e material isotrópico, é dada por:

$$[H] = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-v^2} & \frac{E \cdot v}{1-v^2} & 0 \\ \frac{E \cdot v}{1-v^2} & \frac{E}{1-v^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2 \cdot (1+v)} \end{bmatrix} \quad (A.30)$$

Por fim, o vetor de deformações generalizadas ou alongamentos de dano $\{\delta_d\}$ causados devido a formação de bandas de localização, escrito em coordenadas cartesianas, é dado por:

$$\begin{aligned}
\{\delta_d\} = & \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ e_{i,ij} \frac{x_i y_j - x_i y_k - x_j y_i + x_j y_k + x_k y_i - x_k y_j}{\sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2} \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}} \\ e_{i,ij} \frac{x_i y_j - x_i y_l - x_j y_i + x_j y_l + x_l y_i - x_l y_j}{\sqrt{(x_i - x_l)^2 + (y_i - y_l)^2} \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}} \\ e_{j,ij} \frac{x_i y_j - x_i y_k - x_j y_i + x_j y_k + x_k y_i - x_k y_j}{\sqrt{(x_j - x_k)^2 + (y_j - y_k)^2} \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}} \\ 0 \end{array} \right\} \\
& + \left\{ \begin{array}{c} e_{j,jk} \frac{x_i y_j - x_i y_k - x_j y_i + x_j y_k + x_k y_i - x_k y_j}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \sqrt{(x_j - x_k)^2 + (y_j - y_k)^2}} \\ e_{k,jk} \frac{x_i y_j - x_i y_k - x_j y_i + x_j y_k + x_k y_i - x_k y_j}{\sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2} \sqrt{(x_j - x_k)^2 + (y_j - y_k)^2}} \\ 0 \\ 0 \\ e_{k,jk} \frac{x_j y_k - x_j y_l - x_k y_j + x_k y_l + x_l y_j - x_l y_k}{\sqrt{(x_k - x_l)^2 + (y_k - y_l)^2} \sqrt{(x_j - x_k)^2 + (y_j - y_k)^2}} \end{array} \right\} \quad (\text{A.31}) \\
& + \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ e_{k,kl} \frac{x_i y_k - x_i y_l - x_k y_i + x_k y_l + x_l y_i - x_l y_k}{\sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2} \sqrt{(x_k - x_l)^2 + (y_k - y_l)^2}} \\ e_{l,kl} \frac{x_i y_k - x_i y_l - x_k y_i + x_k y_l + x_l y_i - x_l y_k}{\sqrt{(x_i - x_l)^2 + (y_i - y_l)^2} \sqrt{(x_k - x_l)^2 + (y_k - y_l)^2}} \\ e_{k,kl} \frac{x_j y_k - x_j y_l - x_k y_j + x_k y_l + x_l y_j - x_l y_k}{\sqrt{(x_j - x_k)^2 + (y_j - y_k)^2} \sqrt{(x_k - x_l)^2 + (y_k - y_l)^2}} \\ 0 \end{array} \right\} \\
& + \left\{ \begin{array}{c} e_{i,li} \frac{x_i y_j - x_i y_l - x_j y_i + x_j y_l + x_l y_i - x_l y_j}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \sqrt{(x_i - x_l)^2 + (y_i - y_l)^2}} \\ e_{i,li} \frac{x_i y_k - x_k y_l - x_k y_i + x_k y_l + x_l y_i - x_l y_k}{\sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2} \sqrt{(x_i - x_l)^2 + (y_i - y_l)^2}} \\ 0 \\ 0 \\ e_{l,li} \frac{x_i y_k - x_k y_l - x_k y_i + x_k y_l + x_l y_i - x_l y_k}{\sqrt{(x_k - x_l)^2 + (y_k - y_l)^2} \sqrt{(x_i - x_l)^2 + (y_i - y_l)^2}} \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

APÊNDICE B – Matrizes do elemento de quatro nós da MDCX proposto neste trabalho

Para o novo elemento com a presença de uma banda horizontal, uma banda vertical, duas bandas diagonais e possibilidade de malhas com elementos irregulares, o vetor de deformações generalizadas ou alongamentos de dano $\{\delta_d\}$ causados devido a formação de bandas de localização, escrito em coordenadas cartesianas, é dado por:

$$\{\delta_d\} = [b] \left\{ \begin{array}{c} s_{ij}e_{i,ij} + s_{ik}e_{i,ik} - s_{il}e_{i,il} \\ -c_{ij}e_{i,ij} - c_{ik}e_{i,ik} + c_{il}e_{i,il} \\ s_{ij}e_{j,ij} + \frac{(y_k - y_j)}{l_{ik}}e_{i,ik} + \frac{(y_j - y_i)}{l_{ik}}e_{k,ik} + s_{jl}e_{j,jl} \\ -c_{ij}e_{j,ij} - \frac{(x_k - x_j)}{l_{ik}}e_{i,ik} - \frac{(x_j - x_i)}{l_{ik}}e_{k,ik} + c_{jl}e_{j,jl} \\ s_{ik}e_{k,ik} - \frac{(y_l - y_k)}{l_{jl}}e_{j,jl} + \frac{(y_k - y_j)}{l_{jl}}e_{l,jl} \\ -c_{ik}e_{k,ik} + \frac{(x_l - x_k)}{l_{jl}}e_{j,jl} + \frac{(x_k - x_j)}{l_{jl}}e_{l,jl} \\ -s_{il}e_{l,il} + s_{jl}e_{l,jl} \\ c_{il}e_{l,il} + c_{jl}e_{l,jl} \end{array} \right\} \quad (B.1)$$

onde $[b]$ é a matriz de transformação cinemática expressa no Apêndice A e e são as espessuras de cada banda em cada nó. Os termos s e c significam respectivamente os valores de seno e cosseno na direção de cada banda, suas expressões são dadas por:

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \frac{(x_j - x_i)}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}} \\ s_{ij} &= \frac{(y_j - y_i)}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}} \\ c_{il} &= \frac{(x_l - x_i)}{\sqrt{(x_l - x_i)^2 + (y_l - y_i)^2}} \\ s_{il} &= \frac{(y_l - y_i)}{\sqrt{(x_l - x_i)^2 + (y_l - y_i)^2}} \\ c_{ik} &= \frac{(x_k - x_i)}{\sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2}} \end{aligned} \quad (B.2)$$

$$s_{ik} = \frac{(y_k - y_i)}{\sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2}}$$

$$c_{jl} = \frac{(x_j - x_l)}{\sqrt{(x_j - x_l)^2 + (y_j - y_l)^2}}$$

$$s_{jl} = \frac{(y_l - y_j)}{\sqrt{(x_j - x_l)^2 + (y_j - y_l)^2}}$$

APÊNDICE C – Modelo para estruturas em concreto reforçado com fibras de aço pela MDC

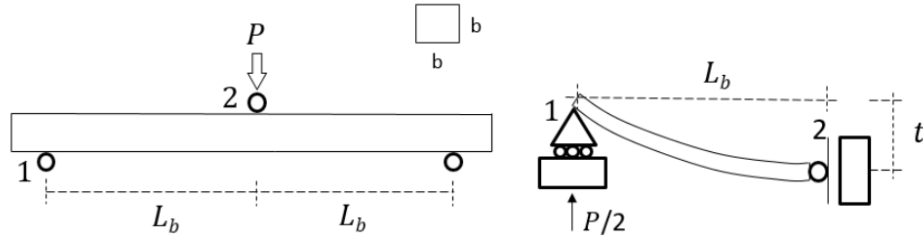
No trabalho de Oliveira (2017), foi apresentado um modelo em dano concentrado para estruturas fabricadas em concreto reforçado com fibras de aço (CRFA). Como resultado, foi obtida uma representação numérica do comportamento não-linear de elementos prismáticos em CRFA submetidos à flexão.

No transcorrer dos trabalhos desta dissertação, além dos resultados apresentados no texto principal, foram feitas novas análises relativas ao modelo proposto originalmente por Oliveira (2017). Com os novos experimentos realizados no Laboratório de Materiais de Construção e Estruturas do Departamento de Engenharia Civil da Universidade Federal de Sergipe, que resultou no trabalho de Rocha (2018), constatou-se que a interpretação dada a alguns parâmetros do equacionamento do modelo de Oliveira (2017), principalmente na formulação da lei de evolução plástica e também na função de resistência à fissuração, possuíam hipóteses não verificadas na prática e que careciam de melhores análises. Os próprios resultados de Oliveira (2017) na aplicação do modelo já demonstravam a necessidade de um maior entendimento da formulação.

Neste apêndice, pretende-se apresentar os pontos da formulação que precisam ser revistos e os novos resultados obtidos com o modelo na reprodução de resultados experimentais da literatura. Inicialmente será feito um breve resumo do trabalho de Oliveira (2017) e em seguida serão apresentados os pontos a serem desconsiderados do modelo e seus resultados na reprodução de dados experimentais.

Modelagem proposta por Oliveira (2017)

O equacionamento base do modelo tem como esquema um elemento de barra que compõe um pórtico plano (Figura C.1). Efetuando-se uma análise à flexão, simulando uma rótula ou nó no ponto de aplicação da carga, é considerada a metade do elemento estando entre os nós 1 e 2.

Figura C.1 – Esquema do elemento de barra b 

Fonte: Oliveira (2017)

A relação ou equação cinemática é dada por:

$$\{\Phi\}_b = [B^0]_b \{q\}_b \quad (C.1)$$

na qual $\{\Phi\}_b$ é a matriz de deformações generalizadas, $[B^0]_b$ é a matriz de transformação cinemática em relação ao estado inicial e $\{q\}_b$ é a matriz de deslocamentos generalizados.

A relação estática ou equação de equilíbrio é dada por:

$$[B^T]_b^T \{M\}_b = \{P\} \quad (C.2)$$

na qual $[B^T]_b^T$ é a transposta da matriz $[B^0]_b$, $\{M\}_b$ é a matriz de esforços internos generalizados e $\{P\}$ é a matriz de esforços externos generalizados em coordenadas globais.

A relação ou lei elástica é dada por:

$$\{\Phi\}_b = [F_0]_b \{M\}_b \quad (C.3)$$

na qual $[F_0]_b$ é a matriz de flexibilidade.

A lei de evolução do dano na região da rótula no nó 2 é dada por:

$$\begin{aligned} \text{Se } G_2^d < R_2^d, \quad \Delta d_2 &= 0 \\ \text{Se } G_2^d &= R_2^d, \quad \Delta d_2 > 0 \end{aligned} \quad (C.4)$$

na qual $G_2^d = \frac{L_b m_2^2}{6EI_b(1-d_2)^2}$ é a taxa de liberação de energia, sendo d_2 a variável de dano e R_2^d é a função de resistência ao dano (ou à fissuração) que precisa ser determinada por análise experimental.

A lei de plasticidade que descreve a evolução da rotação plástica na região da rótula do nó 2 é dada por:

$$\begin{aligned} \text{Se } F_2 < 0, \quad \Delta\phi_2^p &= 0 \\ \text{Se } F_2 = 0, \quad \Delta\phi_2^p &\neq 0 \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

na qual F_2 é a função de escoamento que também precisa ser definida por análise experimental.

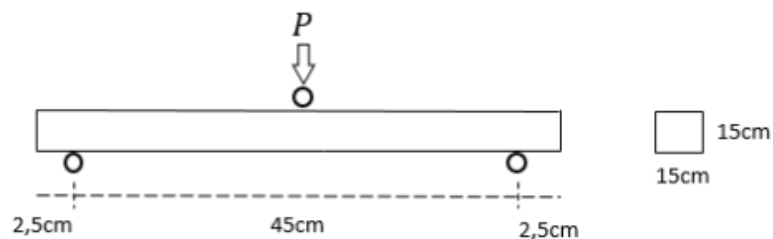
A última parte necessária do equacionamento é a adaptação da lei elástica com a inclusão dos efeitos inelásticos (dano e rotação plástica) para formar a equação constitutiva completa do elemento, que é dada por:

$$\{\Phi - \Phi^p\}_b = [F(d)]_b \{M\}_b \quad (\text{C.6})$$

na qual $\{\Phi^p\}_b$ é a matriz de deformações plásticas desprezando-se o alongamento plástico e $[F(d)]_b$ é a matriz de flexibilidade do membro danificado.

Com o intuito de obter dados experimentais necessários para a proposição das leis de evolução do dano e da rotação plástica, Oliveira (2017) utilizou um ensaio de flexão com ciclos de carga e descarga em um elemento prismático, como apresentado na Figura C.2. A cada ciclo é possível computar a gradativa perda de rigidez devido à fissuração e assim obter o dano gerado no elemento estrutural. Nesse ensaio, foi adotado um teor de 0,5% em fração do volume de fibras.

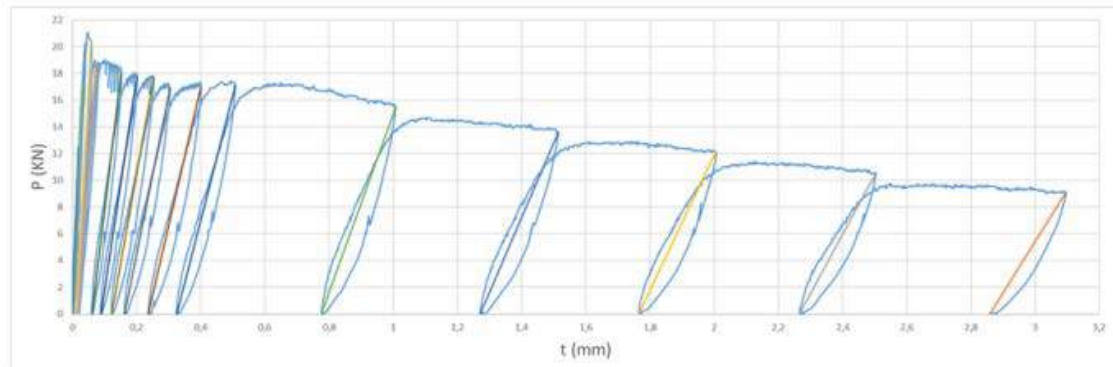
Figura C.2 – Esquema do ensaio cíclico



Fonte: Oliveira (2017)

A Figura C.3 apresenta o gráfico do ensaio cíclico com destaque para os ciclos de descarregamento e carregamento.

Figura C.3 – Resultado do ensaio cíclico



Fonte: Oliveira (2017)

A partir da Equação C.6, aplicada ao esquema da Figura C.1, temos que como no nó 1 a rotação não está restringida, não há rotação de flexão, isto é: $\phi_1 = 0$. Sendo assim, para esse esquema, a relação constitutiva é dada por:

$$\phi_2 - \phi_2^p = -\frac{L_b}{6EI_b} m_1 + \frac{L_b}{3EI_b(1 - d_2)} m_2 \quad (C.8)$$

Do equilíbrio no elemento, os momentos fletores nos nós são $m_1 = 0$ e $m_2 = \frac{PL_b}{2}$ e de acordo com a cinemática de deformação do elemento, as rotações no nó j são $\phi_2 = \frac{t}{L_b}$ e $\phi_2^p = \frac{t^p}{L_b}$, onde t é a deflexão no ponto de aplicação da carga P e t^p é o deslocamento plástico residual ao fim do descarregamento. Substituindo esses termos na Equação C.8 e partindo da relação clássica que relaciona força e deslocamento, é obtida a equação abaixo:

$$P = E(d)(t - t^p) \quad (C.9)$$

na qual $E(d) = E_0(1 - d)$, d_2 foi reescrito apenas como d e $E_0 = \frac{6EI_b}{L_b^3}$ é a rigidez inicial.

A função $E(d)$ é obtida do gráfico força *versus* deflexão obtido por meio do ensaio cíclico dos procedimentos experimentais. Os valores de $E(d)$ em cada ciclo são as inclinações das retas entre início e fim do descarregamento, representadas no gráfico da Figura C.3 em diferentes cores a cada ciclo. O valor de E_0 é a inclinação da reta do primeiro ciclo, enquanto ainda não há dano no elemento.

Com isso, do gráfico da Figura C.3, pode-se obter o valor do dano a cada ciclo utilizando a equação abaixo:

$$d = 1 - \frac{E(d)}{E_0} \quad (\text{C.10})$$

Além disso, também podem ser obtidos outros parâmetros de interesse como G^d , m e ϕ^p que estão indicados na Tabela C.2 com identificação de cada um dos ciclos aplicados (C1, C2...).

Tabela C.2 – Parâmetros do ensaio cíclico

	C0	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8
E (d) (KN/mm)	627,20	575,33	518,87	432,49	384,00	329,32	306,97	196,07	157,19
E0 (KN/mm)	627,20								
d	0,00	0,08	0,17	0,31	0,39	0,47	0,51	0,69	0,75
m (KN.mm)	1411,20	1941,75	2276,55	2286,79	2116,80	2111,74	2106,56	2029,28	1998,34
Gd (KN.mm)	0,06	0,14	0,24	0,35	0,38	0,51	0,58	1,33	2,00
ϕ^p (rad)	0,00E+00	4,44E-06	1,33E-05	4,89E-05	5,33E-05	7,11E-05	8,89E-05	2,71E-04	3,96E-04

	C9	C10	C11	C12	C13	C14	C15	C16	C17
E (d) (KN/mm)	134,23	118,14	103,85	93,83	66,90	55,95	50,34	44,25	38,25
E0 (KN/mm)									
d	0,79	0,81	0,83	0,85	0,89	0,91	0,92	0,93	0,94
m (KN.mm)	1993,28	1900,58	1915,99	1921,16	1746,00	1529,66	1364,85	1189,80	1019,81
Gd (KN.mm)	2,73	3,21	4,22	5,19	8,44	9,26	9,11	8,96	8,81
ϕ^p (rad)	5,42E-04	7,20E-04	1,05E-03	1,45E-03	3,45E-03	5,65E-03	7,84E-03	1,01E-02	1,27E-02

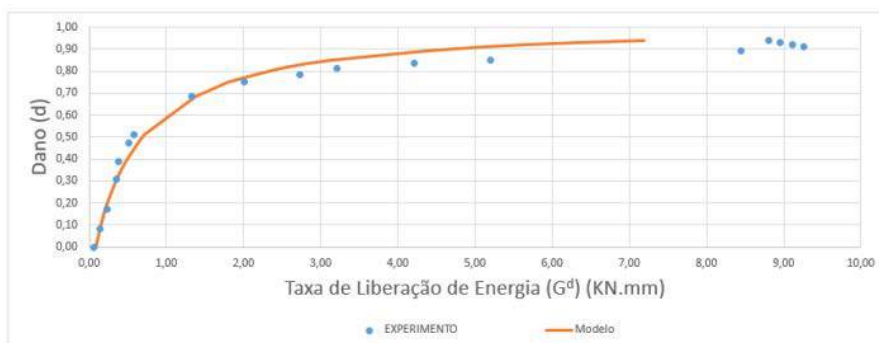
Fonte: Oliveira (2017)

Com esses dados, é possível a construção do gráfico de dano (d) *versus* taxa de liberação de energia (G^d) (Figura C.4) por meio do qual pode-se ajustar a melhor curva que descreve a função R^d . O ajuste obteve a seguinte função:

$$R^d(d) = R_0 + q \frac{\ln(1-d)}{(1-d)^{\alpha_f}} \quad (\text{C.11})$$

na qual R_0 , q e α_f são parâmetros que dependem das características do elemento sob análise.

Figura C.4 – Gráfico dano x taxa de liberação de energia



Fonte: Oliveira (2017)

O parâmetro α_f depende do teor de fibras no concreto e é dado por:

$$\alpha_f = (0,1 CF)^{-1/2} \quad (C.12)$$

de forma que CF é o consumo de fibras em kg/m^3 .

O parâmetro R_0 representa a resistência inicial à fissuração antes da ocorrência de dano. Seu valor é dado pela equação:

$$R_0 = \frac{F^0 M_{cr}^2}{2} \quad (C.13)$$

na qual $F^0 = \frac{L_b}{3EI_b}$.

O momento de fissuração crítico (M_{cr}) precisa ser deduzido por análise do equilíbrio da seção no limite elástico. Para o caso de uma seção transversal quadrada de lado b , resulta na equação:

$$M_{cr} = \frac{\sigma_t b^3}{6} \quad (C.14)$$

na qual σ_t é a tensão de resistência à tração do elemento.

O parâmetro q precisa ser encontrado por meio de um sistema de equações com base na igualdade $R^d = G^d$:

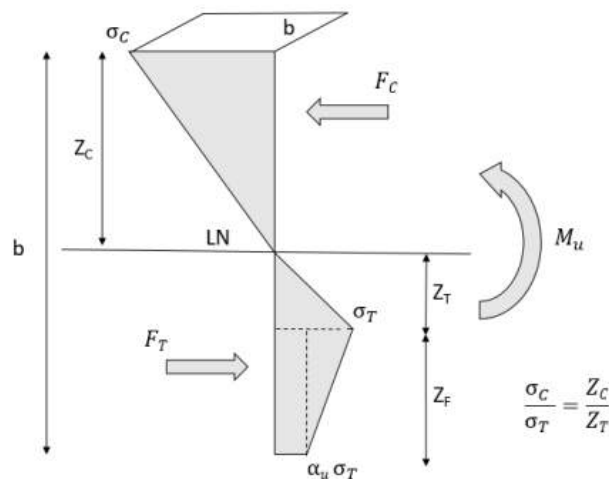
$$\frac{F^0 m^2}{2(1-d)^2} = R_0 + q \frac{\ln(1-d)}{(1-d)^{\alpha_f}} \quad (\text{C.16})$$

e nos pontos de contorno da curva momento *versus* dano:

$$\begin{aligned} m &= M_{cr}, \text{ quando } d = 0 \\ m &= M_u, \text{ quando } d = d_u \\ \left. \frac{\partial m}{\partial d} \right|_{d=d_u} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

O valor do momento último (M_u) foi determinado por meio do esquema da Figura C.5, baseado no modelo de Ulfkjær, Krenk e Brincker (1992), no qual σ_c é dada pelo f_{ck} e o parâmetro α_u depende das fibras. No trabalho de Oliveira (2017), o α_u foi determinado por observação experimental das curvas do ensaio e, por falta de dados experimentais mais amplos, foi fixado para todos os teores de fibras. Resolvido o equilíbrio da seção (Figura C.5), obtém-se o valor de M_u .

Figura C.5 – Esquema da seção no momento último



Fonte: Oliveira (2017)

De posse do valor de M_u , o sistema da Equação C.17 é resolvido retornando os valores de q e d_u . Assim fica definida a lei de evolução do dano.

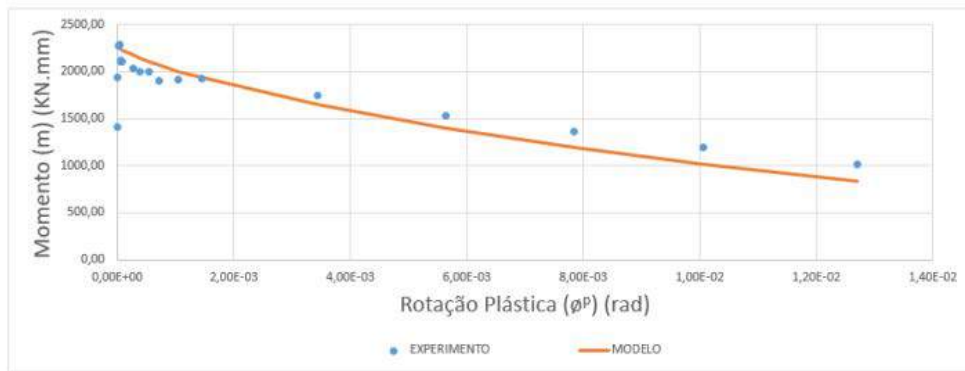
Com relação a lei de evolução da rotação plástica, para o trabalho de Oliveira (2017), a plastificação da seção é função da plastificação do concreto sob compressão, já que as fibras, devido ao baixo teor, são arrancadas e não atingem o escoamento.

Com base na lei constitutiva do elemento, tem-se:

$$\phi_2^p = \frac{t}{L_b} - \frac{L_b}{3EI_b(1-d_2)}m_2 \quad (C.18)$$

Assim, pode ser traçado um gráfico momento *versus* rotação plástica (Figura C.6)

Figura C.6 – Gráfico momento x rotação plástica



Fonte: Oliveira (2017)

e com base nos pontos do gráfico, aplicando-se a hipótese de que não há rotação plástica se $d < d_u$, a melhor curva que descreve a evolução da rotação plástica na rótula foi:

$$F_2 = \frac{m_2}{(1-d)} - \frac{W\left(-\frac{F^0\beta m_2 e^{(-\beta(\phi_2^p - \phi_2^u))}}{-1+d}\right)}{F^0\beta} \leq 0 \quad (C.19)$$

na qual β depende das características do elemento em análise e $W(\cdot)$ é a função W de Lambert. O parâmetro β sofre influência do volume de fibras e é importante na descrição descendente da curva pós-ruptura da matriz. Por hipótese, considerou-se o seu valor como sendo $\beta = 10 FT$, no qual FT é um fator de tenacidade.

Com isso, determinadas as leis de evolução do dano e da rotação plástica, o modelo proposto por Oliveira (2017) está completo.

Ajustes no modelo

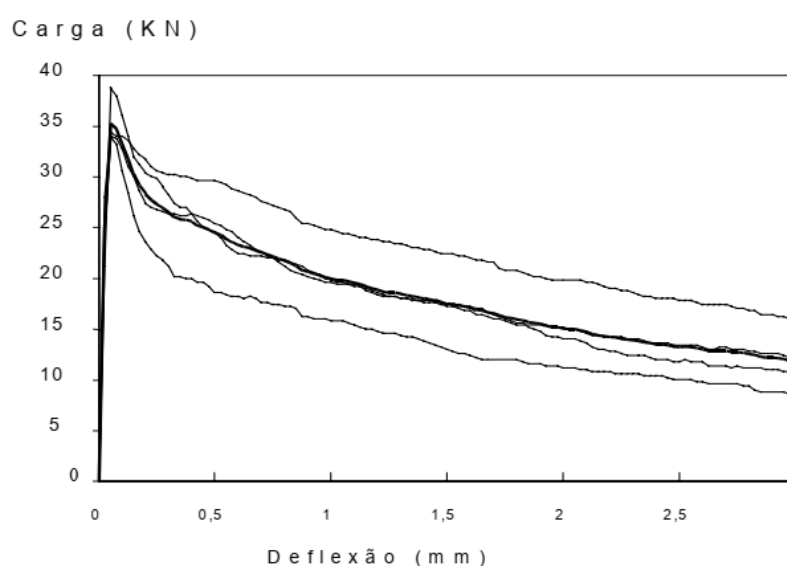
A explicação dada aos parâmetros α_f e β não foram verificados na prática em ensaios mais recentes no trabalho de Rocha (2018). Por falta de mais dados experimentais não foi possível entender quais as influências dos parâmetros no modelo, que dependem de cada caso. Sendo assim, com o banco de dados experimentais atual não se garante a explicação dada aos parâmetros no trabalho de Oliveira (2017). Para isso seriam necessários novos experimentos com variações nos parâmetros de ensaio a fim de identificar as influências no modelo.

Com essa nova observação, o modelo completo foi aplicado ao exemplo apresentado no trabalho de Figueiredo (2000). A comparação com dados experimentais serve como validação da aplicabilidade da formulação proposta.

Em seu trabalho, Figueiredo (2000) apresenta resultados de ensaios experimentais utilizando concreto reforçado com fibras de aço. É utilizado o mesmo esquema apresentado na Figura C.2, com outras dimensões do prisma ($15 \times 15 \times 50 \text{ cm}^3$) e outra mistura de CRFA. A mistura foi planejada para um $f_{ck} = 20 \text{ MPa}$ e apresenta conteúdo de fibras de 40 kg/m^3 . Como resultado experimental a resistência a compressão foi de $25,4 \text{ MPa}$ aos 28 dias e uma resistência a flexão de $5,2 \text{ MPa}$.

O gráfico da Figura C.7 mostra as curvas individuais e a curva média dos ensaios de flexão nos corpos de prova ensaiados por Figueiredo (2000).

Figura C.7 – Curvas do ensaio à flexão

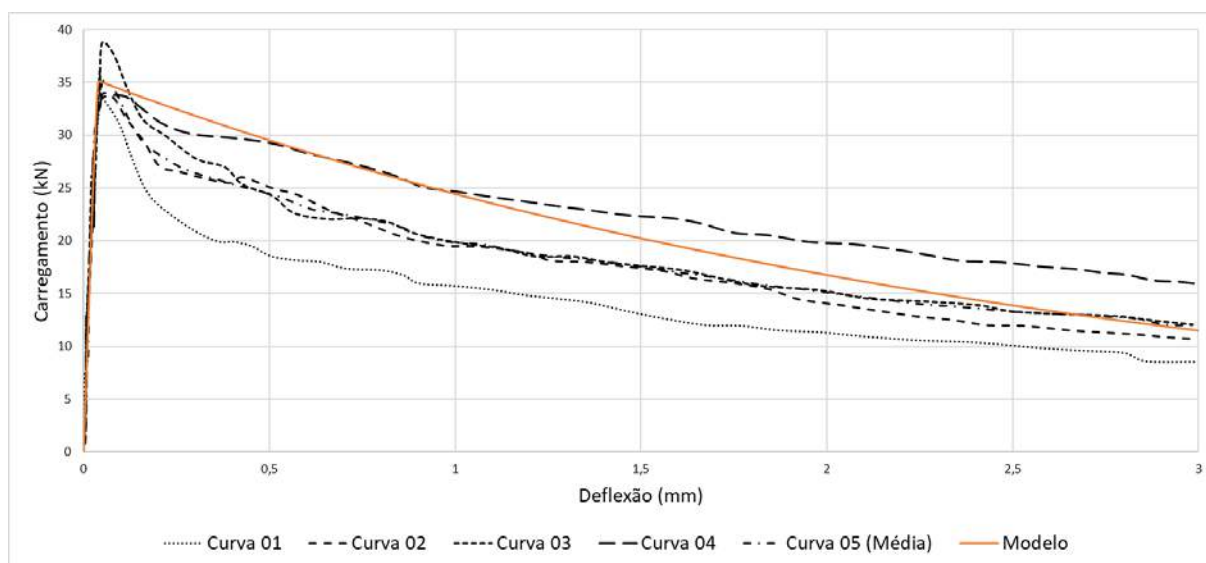


Fonte: Figueiredo (2000)

O modelo proposto foi aplicado a este caso e teve como resultado a curva do modelo apresentada na Figura C.8 em cor laranja. Nesta figura o gráfico do ensaio de Figueiredo (2000) foi replicado para sobrepor à curva do modelo. A aplicação do modelo segue os mesmos passos apresentados no trabalho de Oliveira (2017) e utiliza um programa de cálculo de interpretação simbólica que resolve o sistema de equações oriundos da formulação e gera os pontos que formam a curva do modelo.

Com base na análise da Figura C.8, o modelo apresenta uma boa aproximação das curvas do ensaio real, comprovando que a formulação é válida. Para esse caso, os parâmetros encontrados foram $\alpha_f = 0,5$ e $\beta = 50$. Apesar disso, como discutido anteriormente, o modelo ainda carece de ajustes e melhor entendimento nas leis de evolução que necessitam de ensaios mais amplos a serem efetuados.

Figura C.8 – Validação modelo x ensaios experimentais



Fonte: O autor

Referências

- FIGUEIREDO, A. D. d. Concreto com Fibras de Aço. [S.l.]: EPUSP - *Escola Politécnica da USP*, 2000.
- OLIVEIRA, João Marcos de Jesus. **Modelagem de estruturas em concreto reforçado com fibras de aço pela mecânica do dano concentrado**. Trabalho de Conclusão de Curso - Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2017.
- ROCHA, Ítalo Mateus Lacerda. **Concreto reforçado com fibras de aço e a teoria do dano concentrado**. Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2018

ULFKJAER, J. P.; KRENK, S.; BRINCKER, R. Analytical model for fictitious crack propagation in concrete beams. *Fracture and Dynamics*. Dept. of Building Technology and Structural Engineering, Aalborg University, R9206, n. 34, 1992.